Colección Lambda

Números Reales

Teoría y práctica

Desigualdades
Intervalos
Inecuaciones
Valor absoluto
Máximo entero

ÁLGEBRA

Grupo Editorial Megabyte®

Juan Carlos Ramos Leiva

Entremos juntos en este apasionante dominio del álgebra

NÚMEROS REALES

DESIGUALDADES E INECUACIONES

Teoría y Problemas Selectos

Juan Carlos Ramos Leyva

GRUPO EDITORIAL

Megabyte

Megabyte s.a.c
GRUPO EDITORIAL

Primera Edición 2014

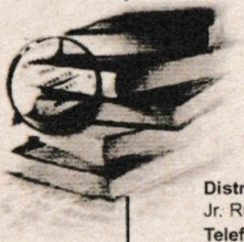
Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú
N° 2014-14688 (Ley N° 26905 / D.S. N° 017-98-ED)
R.U.C. N° 20507993444

Autor
Lic. Juan Carlos Ramos Leyva

Diseño de carátula y Diagramación

NÚMEROS REALES

Desigualdades e inecuaciones



Distribución y Ventas
Jr. Rufino Torrico 889 of. 208 - Cercado de Lima
Telefax: 332-4110

www.editorialmegabyte.com

Presentación

Se dice que todo cambio planificado en la vida del hombre es para buscar su mejora, lograr el éxito y alcanzar la tan ansiada felicidad, no es tan fácil este cambio pues requiere de gran esfuerzo y mucha dedicación.

Es una constante en nuestra vida el qué hacer diario. Sin duda en ocasiones caemos preso de una rutina que nos consume lentamente y nos hace difícil todo intento de cambio, pero sin embargo llega un momento, quizá único, en el cual debemos dar ese gran giro y corregir lo que hasta entonces es monótono.

Número Reales es un aporte cuyo objetivo es cubrir ese enorme vacío en el marco teórico--práctico existente en una infinidad de estudiantes.

El contenido de ésta obra vincula tres etapas bien definidas:

1. *Exposición de la teoría clara y concreta acompañada de ejercicios de aplicación.*
2. *Serie de ejercicios y problemas resueltos ordenados secuencialmente según el grado de dificultad.*
3. *Serie de ejercicios y problemas propuestos.*

Sin lugar a duda ésta obra permitirá que el estudiante asimile un mayor dominio de éste tema tan importante dentro de la matemática.

Finalmente quiero terminar agradeciendo al Grupo Editorial Megabyte por hacer posible ésta publicación, esperando que ésta obra tenga la misma acogida que las presentadas anteriormente, me despido de todos los estudiantes y colegas de quienes espero sus críticas que para mi será muy grato. Hasta pronto.

A mis queridos padres:
Oscar y Marcelina
A todos los jóvenes estudiantes que van forjando un mejor mañana.

Lic. Juan Carlos Ramos Leyva

E&M

Índice

NÚMEROS REALES

DESIGUALDADES E INECUACIONES

1. INTRODUCCIÓN AL SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES

1.1. Operación matemática

1.1A) Definición:

Una operación matemática llamada también operación binaria sobre un conjunto **A** es un tipo de relación que asigna a cada par ordenado de elementos de **A**×**A** (dominio), un único elemento de **A** (rango).

Ejemplo

Sean 3 y 5 dos elementos del conjunto $\mathbb{N}$, entonces 3.5 es la operación matemática llamada multiplicación y definida en $\mathbb{N}$, en la que a 3 y 5 se les hará corresponder con 15 de modo que 15 es el triple de 5. Al elemento 15 se le llama resultado de la operación.

1.1B) Regla de correspondencia:

Es el criterio que nos indica como se eligen las parejas de elementos del dominio y el rango.

Este criterio puede darse por comprensión (se indican las condiciones que cumplen los elementos) o por cierta fórmula.

Ejemplo $M = \{(x; y) \in A \times A$ / "y" es el doble de "x"$\}$
o : $y = 2x$

Ejemplo En $\mathbb{N}$, $F(x; y) = x + y$ es una operación binaria
En $\mathbb{Z}$, $F(x ; y) = x - y$ es una operación binaria

1.1C) Operador:

Es el símbolo que representa a una operación que está definida por una regla de correpondencia. Este símbolo generalmente es un asterisco ($*$), pero puede ser cualquier otra figura como: #; %; T; Δ;....etc.

Ejemplo Dado el conjunto $A = \{a, b, c\}$, se escribe la operación $*$, así:
$a * b$, que se lee "a" asterisco "b"
a T c, que se lee "a" truco "c".

1.2 Ley de composición interna

1.2A) Definición:

Sea A un conjunto no vacio llamaremos ley de composición interna o simplemente ley de composición definida sobre A, a toda relación de la forma:

$$* : A \times A \to A$$

Si x, $y \in A$, escribiremos: $*(x ; y) = x * y$

Al elemento $x * y$ lo denominamos la composición (por $*$) de x con **y**.

Una ley de composición interna definida en esta forma, consiste en una operación matemática que asigna a cada par ordenado de elementos de A un único elemento de A.

Ejemplo

Sea $A = \{a, b, c\}$ y la operación $*$ definida en A, cuya regla de correspondencia viene dada por la siguiente tabla de doble entrada.

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

En la primera columna, así como en la primera fila se han anotado los elementos del conjunto A (a, b, c)

Todas las composiciones de la operación están ubicadas en los recuadros de fondo sombreado.

Por ejemplo el compuesto a∗b se encuentra en la intersección de la fila que determina "a" y la columna que define "b", en ese orden. Así tenemos:

$$a * a = a \in A$$
$$a * b = b \in A$$
$$a * c = c \in A$$

Facilmente podemos comprobar que todas las composiciones posibles pertenecen al conjunto A, luego ∗ es una ley de composición interna.

Observación:

La ley de composición interna de una operación matemática puede estar dada por una fórmula, por una tabla de doble entrada, por un diagrama sagital o por un par de ejes coordenados.

1.2B) Propiedades:

Sea ∗ una ley de composición interna en A, es decir:

$* : A \times A \to A$

i) Conmutativa

$* : A \times A \to A$ es conmutativa $\longleftrightarrow$ $a * b = b * a$, para todo elemento $a, b \in A$

ii) Asociativa

$* : A \times A \to A$ es asociativa $\longleftrightarrow$ $(a * b) * c = a * (b * c)$ cualesquiera $a, b, c \in A$

Observación:

Teniendo en cuenta la definición una ley de composición interna verifica la propiedad de ***clausura o cerradura*** $(a \in A \ \wedge \ b \in A \to a * b \in A)$

1.2C) Elementos existenciales:

i) Existencia del elemento neutro

Dado el conjunto A, si existe en dicho conjunto un elemento **e** que compuesto a izquierda y derecha con cualquier otro elemento del conjunto, le corresponde otro igual a el, diremos que **e** es el elemento neutro o identidad respecto de la ley ∗ y se define así:

$$\mathbf{e \in A \text{ es neutro respecto de } * \longleftrightarrow \forall a \in A : a*e = e*a = a}$$

ii) Existencia del elemento inverso en una ley con neutro

Sea $*$ una ley de composición interna en A, con elemento neutro **e**. Dado **a** $\in$A interesa investigar si existe **a'** $\in$ A tal que compuesto a izquierda y a derecha con **a** origine como resultado **e**.

$$a' \in A \text{ es el inverso de } a \in A \text{ respecto de } * \longleftrightarrow a * a' = a' * a = e$$

Observación:

El neutro es un elemento del conjunto relativo a todos los elementos. El inverso sí existe, es relativo a cada elemento.

Los elementos de **A** que admiten inversos respecto de $*$ se llaman inversibles.

1.2D) Unicidad de los elementos existenciales

i) Unicidad del neutro

Si existe neutro en A respecto de $*$, entonces es único. Supongamos que **e** y **e'** son neutros respecto de $*$; entonces por ser **e** neutro y por serlo **e'** se tiene:

Primero: $e' = e' * e = e * e'$

Segundo: $e = e * e' = e' * e$

$\Rightarrow e' = e$

ii) Unicidad del inverso respecto de una ley asociativa

Si un elemento **a** $\in$ A admite inverso respecto de la ley asociativa $*$, entonces dicho inverso es único.

Supongamos que **a'** y **a''** son inversos de **a**, luego:

Primero: $a'' = a'' * e = a'' * (a * a')$

Segundo: $a'' = (a'' * a) * a' = e * a'$

$\therefore \quad a'' = a'$

1.2E) Distributividad de una ley de composición interna respecto de otra.

Si sobre un conjunto **A** se han definido dos leyes de composición interna que denotamos: $*$ y #, se puede operar dos elementos **a** y **b** de **A** mediante el operador $*$ y el resultado que pertenece a **A**, con otro elemento **c** $\in$ **A** por medio del operador #.

i) Distribución a la izquierda

$$c \# (a * b) = (c \# a) * (c \# b)$$

ii) Distribución a la derecha

$$(a * b) \# c = (a \# c) * (b \# c)$$

Se dice que # es distributiva respecto de $*$ si y sólo si lo es a izquierda y derecha.

1.3 Conjunto de los números reales.

1.3A) Conjunto:

Se entiende como conjunto a una colección de cualquier tipo de objetos llamados elementos del conjunto, que está determinado por una propiedad o característica común de quienes lo conforman y se enuncia mediante un lenguaje preciso.

Para denotar a un conjunto se utilizan letras mayúsculas (A,B,C,D,....) y sus elementos separados por comas (o punto y coma si son números) se encierran por llaves: {}

Ejemplo

Los hijos de Marcelina son Juan, Elizabeth, Marlene y Carlos; luego el conjunto de los hijos de Marcelina denotado por M, se puede escribir así:

M = {Juan, Elizabeth, Marlene, Carlos}

Observar que los elementos: Juan, Elizabeth, Marlene y Carlos tienen como propiedad común el ser hijos de Marcelina.

Observación:

Todo conjunto es una colección de objetos, pero no toda colección de objetos es un conjunto.

1.3B) Conjuntos numéricos:

Son conjuntos cuyos elementos son cualesquiera de los números existentes.

$\mathbb{N}$: conjunto de los números naturales

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; ....\}$

$\mathbb{Z}$: conjunto de los números enteros

$\mathbb{Z} = \{....; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ....\}$

Q : conjunto de los números racionales

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} / a, b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0 \right\}$$

Q' : conjunto de los números irracionales

$$Q' = \left\{ x \,/\, \forall\, a, b \in \mathbb{Z};\ b \neq 0 : x \neq \frac{a}{b} \right\}$$

$\mathbb{R}$: conjunto de los números reales

$\mathbb{R} = Q \cup Q'$

C: conjunto de los números complejos

$$C = \left\{ a + bi \,/\, a, b \in \mathbb{R};\ i = \ -1 \right\}$$

Observaciones:

Si "S" es un conjunto numérico, tenga en cuenta lo siguiente.

i) S* es el conjunto que no considera al elemento cero.

ii) S_o es el conjunto al cual se le añade el elemento cero.

Ejemplo

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; .....\}$

$\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; ....\}$

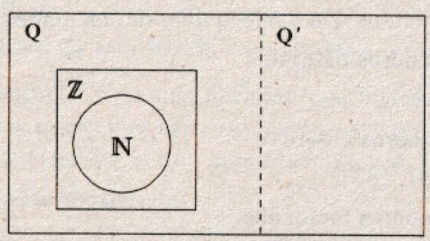
$\mathbb{Z}^+ = \{1; 2; 3; ....\}$

$\mathbb{Z}_0^+ = \{1; 2; 3; ....\} \cup \{0\} = \{0; 1; 2; 3; ....\}$

1.3C) Número real:

Se denomina número real a todo elemento perteneciente al conjunto $\mathbb{R}$, formado por la unión de los números enteros, el cuerpo de fracciones asociado al conjunto anterior (números racionales) y el conjunto de los números irracionales (los que no se pueden expresar como cociente de dos números enteros).

El diagrama general del conjunto $\mathbb{R} = Q \cup Q'$ es:



Observar que **Q** y **Q'** son conjuntos disjuntos (línea punteada), de aquí que ningún número racional es irracional y viceversa.

Ejercicio 1

En el conjunto A = {1; 2; 3; 4} se define la operación ∗ según la siguiente tabla:

∗	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	1	1
3	3	1	1	4
4	4	2	3	4

I. Es cierto que $\forall a,b \in A$ se cumple: $a * b = b * a$

II. Calcular: $(2 * 3) * [3 * (4 * 1)]$

Resolución:

I. Aquí nos preguntan si ∗ es o no conmutativa, es decir

$$\forall\, a,b \in A:\ a * b = b * a$$

De la tabla: $1 * 2 = 2$

Asimismo: $2 * 1 = 2$

Con lo cual: $1 * 2 = 2 * 1$

Pareciera que ∗ es conmutativo, pero aún no podemos asegurar esto pues debemos verificar con todas las parejas posibles.

De la tabla: $2 * 4 = 1$

Asimismo: $4 * 2 = 2$

De donde: $2 * 4 \neq 4 * 2$, lo cual asegura que ∗ no es conmutativo ¿ Porqué ? porque la conmutatividad exige que se verifique para todo par de elementos del conjunto de definición.

II. Sea: $K = (2 * 3) * [3 * \underbrace{(4 * 1)}_{\text{de tabla: } 4}]$

$K = (2 * 3) * [3 * 4]$

$K = 1 * 4$ $\therefore$ $K = 4$

Ejercicio 2

Demostrar que la ecuación: $x^2 - 2 = 0$, no tiene solución en el conjunto de los números racionales (**Q**)

Resolución:

Supongamos que: $x^2 - 2 = 0$, sí tiene solución en el conjunto de los números racionales, es decir que:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad \text{Enteros P.E.Si}$$

Elevando al cuadrado: $a^2 = 2b^2$

Fácilmente notamos que "a" es par, pues a^2 es par; luego podemos establecer que:

$$a = 2m \Rightarrow \quad (2m)^2 = 2b^2$$
$$4m^2 = 2b^2$$
$$2m^2 = b^2$$

De donde podemos apreciar que "b" es par, pues b^2 es par. Como "a" y "b" son pares; luego "a" y "b" no son P.E.Si, lo cual contradice la hipótesis.

$$\therefore \ \sqrt{2} \notin \mathbf{Q} \text{ (no existe solución en } \mathbf{Q}\text{)}$$

Ejercicio 3

En $\mathbb{R}$, conjunto de los números reales, definimos la operación: $a * b = a + b - 3$

Determine la validez de las siguientes proposiciones

I. $*$ tiene elemento neutro

II. En esta operación el inverso de 4 es -4

Resolución:

I. Sea **e** el elemento neutro sobre $*$, luego se debe cumplir que:

$$a * e = e * a = a \quad ; \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

A partir de: $\underbrace{a * e}_{\text{por la fórmula}} = a$

$$a + e - 3 = a$$
$$e - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad e = 3$$

$\therefore$ $*$ tiene elemento neutro ¡verdadero!

II. Como $*$ admite neutro ($e = 3$) sí podemos analizar la existencia del inverso de algún elemento.

$$4 * 4' = 4' * 4 = 3$$

A partir de: $\underbrace{4 * 4'}_{\text{por la fórmula}} = 3$

$$4 + 4' - 3 = 3$$
$$4' = 3 + 3 - 4 \quad \rightarrow \quad 4' = 2$$

$\therefore$ El inverso de 4 es 2 y no -4 ¡falso!

2. NÚMEROS REALES

2.1. Sistema de los números reales

2.1A) Definición axiomática

El sistema de los números reales es un conjunto de elementos denotado por $\mathbb{R}$, llamados números reales, que está provisto de dos leyes de composición interna llamadas; adición, denotada por (+) y multiplicación, denotada por (·), más una relación de igualdad (=) y otra de orden (>).

Observación:

El sistema de los números reales se puede construir por un conjunto de axiomas, tener en cuenta que un axioma es una proposición tan clara y evidente que se admite sin necesidad de demostración.

2.2. Axiomas para la adición

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (a\,;b) & \to & a+b \end{array}$$

2.2A) Clausura o Cerradura:

$$a+b\in\mathbb{R}\ ;\forall\, a,b\in\mathbb{R}$$

2.2B) Conmutativa:

$$a+b=b+a\ ;\forall\, a,b\in\mathbb{R}$$

2.2C) Asociativa:

$$(a+b)+c=a+(b+c)\,;\forall\, a,b,c\in\mathbb{R}$$

2.2D) Existencia del Elemento Neutro:

$$\forall\, a\in\mathbb{R}, \exists!\, 0\in\mathbb{R}\,/\,a+0=0+a=a\,;(0=\text{cero})$$

El cero (0) recibe el nombre de neutro aditivo

2.2.E) Existencia del Elemento Inverso:

$$\forall\, a\in\mathbb{R}, \exists!(-a)\in\mathbb{R}\,/a+(-a)=(-a)+a=0$$

El elemento (–a) se llama inverso aditivo de **a**. Consensuadamente recibe el nombre de opuesto de **a** y también se le representa así: **Op(a) = –a**

2.3 Axiomas para la multiplicación

$$\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(a; b) \rightarrow a \, . \, b$$

2.3A) Clausura o Cerradura:

$$a.b \in \mathbb{R} \; ; \forall \, a, b \in \mathbb{R}$$

2.3B) Conmutativa:

$$a.b = b.a \; ; \forall \, a, b \in \mathbb{R}$$

2.3C) Asociativa:

$$(a.b).c = a.(b.c) \; ; \forall \, a, b, c \in \mathbb{R}$$

2.3D) Existencia del Elemento Neutro:

$$\forall \, a \in \mathbb{R}, \exists! 1 \in \mathbb{R} \, / \, a \, . \, 1 = 1 \, . \, a = a \; ; (1 = \text{uno})$$

El uno (1) recibe el nombre de neutro multiplicativo

2.3E) Existencia del Elemento Inverso:

$$\forall \, a \in \mathbb{R}^*, \exists! a^{-1} = \frac{1}{a} \in \mathbb{R} \, / \, a^{-1} \, . \, a = a \, . \, a^{-1} = 1$$

El elemento a^{-1} se llama inverso multiplicativo de **a**, consensuadamente recibe el nombre de recíproco de **a** y también se le representa así: **Rec(a) = 1/a**

2.3F) Distributividad de la Multiplicación Respecto a la Adición:

i) Por izquierda: $c.(a + b) = c \, . \, a + c \, . \, b \; ; \; \forall \, a, b, c \in \mathbb{R}$

ii) Por derecha: $(a + b).c = a \, . \, c + b \, . \, c \; ; \; \forall \, a, b, c \in \mathbb{R}$

2.4. Axiomas para la igualdad

2.4A) Dicotomia: $a = b \; \vee \; a \neq b \; ; \; \forall \, a,b \in \mathbb{R}$

2.4B) Reflexiva: $a = a \; ; \; \forall \, a \in \mathbb{R}$

2.4C) Simetría: $a = b \Longrightarrow b = a \; ; \; \forall \, a, b \in \mathbb{R}$

2.4D) Transitividad:

Si: $a = b \wedge b = c$, entonces : $a = c$; $a, b \wedge c \in \mathbb{R}$

2.4E) Unicidad de la adición:

Si: $a = b \implies a + c = b + c$; $a, b \wedge c \in \mathbb{R}$

2.4F) Unicidad de la multiplicación:

Si: $a = b \implies a \cdot c = b \cdot c$; $a, b \wedge c \in \mathbb{R}$

Ejercicio 4

Demostrar que $a \cdot 0 = 0$; $\forall\, a \in \mathbb{R}$

Resolución:

Supongamos que: $b = a \cdot 0$ ....(Hipótesis)

Por axioma tenemos: $b = b$

Por elemento neutro: $b = b + 0$

$\downarrow$ **Hipótesis**

$b = a \cdot 0 + 0$

Por elemento inverso: $b = a \cdot 0 + [a + (-a)]$

Por axioma tenemos: $b = (a \cdot 0 + a) + (-a)$

Por elemento neutro: $b = (a \cdot 0 + a \cdot 1) + (-a)$

Por axioma tenemos: $b = a \cdot \underbrace{(0 + 1)}_{\text{Neutro en la adición}} + (-a)$

$b = \underbrace{a \cdot 1}_{\text{Neutro en la multiplicación}} + (-a)$

$b = a + (-a)$

Por elemento inverso: $b = 0$

$\therefore \boxed{a \cdot 0 = 0}$ *Lqqd*

Ejercicio 5

Teniendo en cuenta la definición: $c^{-1} = \frac{1}{c}$; $\forall\, c \neq 0$. Demostrar que si $a, b, x \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$, entonces: $ax + b = 0 \iff x = -\frac{b}{a}$.

Resolución:

Partiendo de: $ax + b = 0$

Por unicidad: $ax + b + (-b) = 0 + (-b)$

Por axioma: $ax + (b + (-b)) = 0 + (-b)$

Por elemento neutro: $ax + 0 = 0 + (-b)$

$ax = -b$

Por unicidad: $a^{-1}.(ax) = a^{-1}.(-b)$

Por axioma: $(a^{-1}.a)x = a^{-1}.(-b)$

Por elemento neutro: $(1).x = a^{-1}.(-b)$

$x = a^{-1}.(-b)$

Por definición (dato): $x = \frac{1}{a}\cdot(-b) \rightarrow x = \frac{1\cdot(-b)}{a}$

Por elemento neutro: $x = -\frac{b}{a} \quad \therefore \quad \boxed{x = -\frac{b}{a}}$ ***Lqqd***

Ejercicio 6

Demostrar que: $a + a + a = 3a$; $\forall a \in \mathbb{R}$

Resolución:

Por el axioma de reflexión: $a + a + a = a + a + a$

Por elemento neutro: $a + a + a = 1.a + 1\cdot a + 1\cdot a$

Por el axioma de distribución: $a + a + a = (1 + 1 + 1)\cdot a$

$a + a + a = (3)\cdot a$

$\therefore \quad \boxed{a + a + a = 3a}$ ***Lqqd***

En general: $\forall a \in \mathbb{R} \ \wedge \ n \in \mathbb{Z}^+$

$$\underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{\text{"n" veces}} = n\,.\,a$$

Ejercicio 7

Teniendo en cuenta la defininción: $a^n = a.a.a\ldots$"n" veces ; $\forall a \in \mathbb{R} \ \wedge \ n \in \mathbb{N} / n \geq 2$

Demostrar que: $a^2 \cdot a^3 = a^5$

Resolución:

Por el axioma de reflexión: $a^2 \cdot a^3 = a^2 \cdot a^3$

Por definición (dato): $a^2 \cdot a^3 = (a \cdot a)\cdot(a \cdot a \cdot a)$

Por èl axioma de asociatividad: $a^2 \cdot a^3 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$

Por definición (dato): $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ***Lqqd***

En general $\forall a \in \mathbb{R} \wedge m, n \in \mathbb{Z}^+$ $\quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Ejercicio 8

Si $x \in \mathbb{R}^*$, resolver $\dfrac{\text{Op}(5-x)+x}{3} + \text{Rec}\left(\dfrac{1}{2x}\right) = x+1$

Resolución:

Teniendo en cuenta al opuesto (Op) y al recíproco (Rec), la ecuación dada es:

$$\frac{-(5-x)+x}{3} + (2x) = x+1 \quad \Rightarrow \quad \frac{2x-5}{3} = -x+1$$

$$2x - 5 = -3x + 3 \quad \Rightarrow \quad 5x = 8 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{8}{5}$$

$$\therefore \quad \text{C.S.} = \left\{\frac{8}{5}\right\}$$

Ejercicio 9

Dermostrar que: $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$; $b \neq 0,\ d \neq 0$

Resolución:

Supongamos que: $K = \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}$ ......(Hipótesis)

Por definición tenemos: $K = a \cdot b^{-1} + c \cdot d^{-1}$

Por elemento neutro: $K = (a \cdot b^{-1}) \cdot 1 + (c \cdot d^{-1}) \cdot 1$

$K = (a \cdot b^{-1}) \cdot (d \cdot d^{-1}) + (c \cdot d^{-1}) \cdot (b \cdot b^{-1})$

Por axioma tenemos: $K = (a \cdot d) \cdot (b^{-1}d^{-1}) + (c \cdot b) \cdot (d^{-1} \cdot b^{-1})$

$K = (a \cdot d) \cdot (b^{-1} \cdot d^{-1}) + (b \cdot c)(b^{-1} \cdot d^{-1})$

$K = (a \cdot d + b \cdot c) \cdot (b^{-1} \cdot d^{-1})$

Por definición tenemos: $K = (a \cdot d + b \cdot c) \cdot \dfrac{1}{b} \cdot \dfrac{1}{d}$

$$K = (a \cdot d + b \cdot c) \cdot \frac{1}{b \cdot d}$$

$$K = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}} \qquad \textit{Lqqd}$$

3. LA DESIGUALDAD

3.1 Definición:

Es la relación que se establece entre dos expresiones reales de diferente valor.

3.1A) Signos de relación:

Reciben este nombre los distintos símbolos que se utilizan para representar a una desigualdad.

Si **a** y **b** son expresiones reales de diferente valor, es correcto representarlos así: **a** ≠ **b** (**a** diferente de **b**); nótese que por ser **a** diferente de **b** es evidente de que **a** es mayor que **b** o bien de que **a** es menor que **b**, luego para establecer estas dos relaciones posibles debemos considerar las siguientes representaciones simbólicas.

$$\left.\begin{array}{l} >\text{: mayor que} \\ <\text{: menor que} \end{array}\right\} \text{signos de relación simple}$$

Ahora para las expresiones reales citadas anteriormente tenemos:

a > b: se lee "**a** es mayor que **b**"

a < b: se lee "**a** es menor que **b**"

Observación

Es frecuente combinar algún signo de relación con la representación simbólica de la igualdad (=), esto dará origen a nuevas relaciones compuestas, veamos:

$$\left.\begin{array}{l} \geq\text{: Mayor o igual que} \\ \leq\text{: Menor o igual que} \end{array}\right\} \text{signos de relación doble}$$

Para las expresiones reales **a** y **b**.

$$\left.\begin{array}{l} a \geq b \longleftrightarrow a > b \ \vee \ a = b \\ a \leq b \longleftrightarrow a < b \ \vee \ a = b \end{array}\right\} \quad \text{Donde: } \vee \text{ es unión}$$

3.2 Axiomas de la desigualdad

3.2A) Ley de tricotomia:

$\forall$ a,b $\in \mathbb{R}$; una y sólo una de las relaciones se cumple:

$$a > b \ \vee \ a < b \ \vee \ a = b$$

3.2B) Ley de transitividad:

Siendo a, b y c elementos del conjunto $\mathbb{R}$.

$$\text{Si } a > b \ \wedge \ b > c, \text{ entonces } a > c$$

3.2C) Ley aditiva:

Siendo a, b y c elementos del conjunto $\mathbb{R}$.

$$\text{Si } a > b; \text{ entonces } a + c > b + c$$

3.2D) Ley multiplicativa:

Siendo a, b y c elementos del conjunto $\mathbb{R}$, de modo que $c \in \mathbb{R}^+$

$$\text{Si } a > b, \text{ entonces } a.c > b.c$$

3.3. Teoremas de la desigualdad

3.3A) $\forall a \in \mathbb{R} : a^2 \geq 0$

3.3B) $a > 0 \rightarrow \frac{1}{a} > 0 \ ; \quad a < 0 \rightarrow \frac{1}{a} < 0$

3.3C) Si a,b,c $\wedge$ d $\in \mathbb{R}$, tal que:

$$\begin{array}{c} a > b \\ c > d \\ \hline a + c > b + d \end{array}$$

Entonces: $a + c > b + d$

También tenemos que si:

$$\begin{array}{c} a > b \\ c < d \\ \hline a - c > b - d \end{array}$$

Entonces: $a - c > b - d$

3.3D) Si a, b, c $\wedge$ d $\in \mathbb{R}^+$, tal que:

$$\begin{array}{c} a > b \\ c > d \\ \hline a.c > b.d \end{array}$$

Entonces: $a.c > b.d$

3.3E) Si a, b $\wedge$ c $\in \mathbb{R}^+$ o bien a, b $\wedge$ c $\in \mathbb{R}^-$: $a < b < c \rightarrow \frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

Observaciones

i) Si a, b ∧ c ∈ $\mathbb{R}$ tal que: $a < b < c \longleftrightarrow a < b \;\wedge\; b < c$; donde ∧ es intersección

ii) Si a, b ∧ c ∈ $\mathbb{R}^+$ o bien a, b ∧ c ∈ $\mathbb{R}^-$ tal que: $a \le b < c \longrightarrow \frac{1}{c} < \frac{1}{b} \le \frac{1}{a}$

3.3F) Si a, b ∧ c ∈ $\mathbb{R}$; $n \in \mathbb{Z}^+$:

$$a < b < c \longrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1} < c^{2n+1}$$

3.3G) Si a, b ∧ c ∈ $\mathbb{R}^+$; $n \in \mathbb{Z}^+$:

$$a < b < c \longrightarrow a^{2n} < b^{2n} < c^{2n}$$

3.3H) Si a, b ∧ c ∈ $\mathbb{R}^-$; $n \in \mathbb{Z}^+$:

$$a < b < c \longrightarrow a^{2n} > b^{2n} > c^{2n} \quad \text{o también}$$

$$a < b < c \longrightarrow c^{2n} < b^{2n} < a^{2n}$$

3.4. Propiedades de la desigualdad

3.4A) Si $a > b \;\wedge\; c < 0$, entonces: $a.c < b.c$

3.4B) Si $a < 0 \;\wedge\; c > 0$, tal que:

$a < b < c$, entonces: $0 \le b^2 < \text{máx}\{a^2; c^2\}$

Donde máx$\{a^2 ; b^2\}$ es el mayor elemento del conjunto $\{a^2 ; c^2\}$

3.4C) $\forall a \in \mathbb{R}^+$: $a + \frac{1}{a} \ge 2$

3.4D) $\forall a \in \mathbb{R}^-$: $a + \frac{1}{a} \le -2$

3.4E) Siendo a, m ∧ n elementos del conjunto $\mathbb{R}^+$

$$\frac{a}{m} + \frac{n}{a} \ge 2\sqrt{\frac{n}{m}}$$

3.4F) Para números positivos: MP ≥ MA ≥ MG ≥ MH

Donde: MP = Media Potencial

MA = Media Aritmética

MG = Media Geométrica

MH = Media Armónica

Para a y b: $\sqrt[k]{\dfrac{a^k+b^k}{2}} \geq \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$

Para a,b y c: $\sqrt[k]{\dfrac{a^k+b^k+c^k}{3}} \geq \dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \geq \dfrac{3}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}$

Tenga en cuenta que si los números considerados son iguales, entonces:
MP = MA = MG = MH, lo recíproco también se verifica.

3.5 Clases de desigualdad

3.5A) Desigualdad absoluta:

Es aquella desigualdad que mantiene el sentido de su signo de relación para cualquier valor asignado a su letra variable. A continuación veamos un ejemplo.

$$x^2+1>0\ ;\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

3.5B) Desigualdad relativa:

Es aquella desigualdad que mantiene el sentido de su signo de relación para ciertos valores de su letra variable. A continuación veamos un ejemplo:

$$x-2>6-x \quad \rightarrow \quad x>4$$

Ejercicio 10

Si $-2<x<4$ ¿Cuántos valores enteros asume "y" donde : $y=2-3x$?

Resolución:

Por condición tenemos: $-2<x<4$

Multiplicando por –3: $6>-3x>-12$

Sumando 2 obtenemos: $8>2-3x>-10$

$8>y>-10$

De donde notamos que: $-10<y<8$

Siendo los enteros **y**: $-9; -8; -7;....;-1; 0; 1;....6; 7$

$\therefore$ **Cantidad de valores enteros y = 17**

Ejercicio 11

Si $-1<x<1$ determine la suma de los valores pares que asume **y**, donde $y=2x^3+3$

Resolución:

Por condición tenemos: $-1 < x < 1$

Elevando al cubo: $-1 < x^3 < 1$

Multiplicando por 2: $-2 < 2x^3 < 2$

Sumando 3 obtenemos: $1 < 2x^3 + 3 < 5$

$1 < y < 5$

Siendo los pares **y**: 2 y 4

$\therefore$ **Σ de valores = 6**

Ejercicio 2

A continuación tenemos la extensión de x: $-2 < x < 3$. Determine la extensión de **y**, donde: $y = \dfrac{x+1}{x+3}$

Resolución:

Observa que: $y = \dfrac{x+1}{x+3} = \dfrac{(x+3)-2}{x+3}$

$$y = \frac{x+3}{x+3} - \frac{2}{x+3} = 1 - \frac{2}{x+3}$$

Por condición tenemos: $-2 < x < 3$

Sumando 3 tenemos: $1 < x + 3 < 6$

Tomando el recíproco: $\dfrac{1}{6} < \dfrac{1}{x+3} < 1$

Multiplicando por –2: $-2 < -\dfrac{2}{x+3} < -\dfrac{2}{6}$

$$-2 < -\frac{2}{x+3} < -\frac{1}{3}$$

Sumando 1 obtenemos: $1 - 2 < 1 - \dfrac{2}{x+3} < 1 - \dfrac{1}{3}$

$\therefore$ $-1 < y < \dfrac{2}{3}$

Ejercicio 3

Si $-1 < x < 5$. Determine la extensión de **y**, donde: $y = x^2 - 6x - 1$

Resolución

Observa que: $y = x^2 - 6x - 1 = (x)^2 - 2(x)(3) + (3)^2 - (3)^2 - 1$

$y = (x-3)^2 - 9 - 1 = (x-3)^2 - 10$

Por condición tenemos: $-1 < x < 5$

Sumando (–3) obtenemos: $-4 < x - 3 < 2$

Elevando al cuadrado: $0 \leq (x-3)^2 < 16$

Finalmente sumando (–10): $-10 \leq (x-3)^2 - 10 < 16 - 10$

$$\therefore \quad -10 \leq y < 6$$

Ejercicio 14

Demostrar que: $x + \dfrac{1}{x} \geq 2 ; \ \forall x \in \mathbb{R}^+$

Resolución:

Formalmente tenemos: $x \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \exists \sqrt{x} \in \mathbb{R}^+$

$$\sqrt{x} \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \exists \frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathbb{R}^+$$

$$\exists \frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \exists \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \in \mathbb{R}^-$$

Ahora podemos plantear: $\left[\sqrt{x} + \left(-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]^2 \geq 0 \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

De donde podemos obtener: $x - 2 + \dfrac{1}{x} \geq 0$

Finalmente sumando 2: $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ ***Lqqd***

Ejercicio 15

Demostrar que los reales **a** y **b** verifican, si a < b, entonces : $a < \dfrac{a+b}{2} < b$

Resolución:

Partiendo de la condición: $a < b$

Por la ley aditiva tenemos: $a + b < b + b \rightarrow a + b < 2b$

Por la ley multiplicativa: $\frac{1}{2}\cdot(a+b)<\frac{1}{2}\cdot(2b) \Rightarrow \frac{a+b}{2}<b$ ....(1)

Partiendo de la condición: $a<b$

Por la ley aditiva tenemos: $a+a<a+b \Rightarrow 2a<a+b$

Por la ley multiplicativa: $\frac{1}{2}\cdot(2a)<\frac{1}{2}\cdot(a+b) \Rightarrow a<\frac{a+b}{2}$ ....(2)

Finalmente de (1) y (2): $a<\frac{a+b}{2}<b$ ***Lqqd***

Ejercicio 16

Demostrar que si a, b y c son números reales, se verifica

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$$

Resolución:

Una rápida inspección permite apreciar que debemos plantear 3 casos, veamos:

$$(a-b)^2 \geq 0 \rightarrow a^2+b^2 \geq 2ab$$
$$(a-c)^2 \geq 0 \rightarrow a^2+c^2 \geq 2ac$$
$$(b-c)^2 \geq 0 \rightarrow b^2+c^2 \geq 2bc$$

Ahora sumando las 3 desigualdades tenemos:

$$a^2+b^2+a^2+c^2+b^2+c^2 \geq 2ab+2ac+2bc$$
$$2a^2+2b^2+2c^2 \geq 2ab+2ac+2bc$$
$$2(a^2+b^2+c^2) \geq 2(ab+ac+bc)$$

Finalmente multiplicando por 1/2 tenemos:

$$\frac{1}{2}[2(a^2+b^2+c^2)] \geq \frac{1}{2}[2(ab+ac+bc)]$$

$$\therefore\ a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$$ ***Lqqd***

Ejercicio 17

Si x, y $\wedge$ z $\in \mathbb{R}^+$. Determine el menor valor que puede asumir:

$$(x+y+z)\cdot(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1})$$

Resolución:

Siendo: x, y $\wedge$ z números positivos podemos plantear la siguiente propiedad: MA $\geq$ MH, veamos:

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$$

Por definición tenemos: $$\frac{x+y+z}{3} \geq \frac{3}{x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}}$$

Ahora teniendo en cuenta la ley multiplicativa, procedemos a multiplicar a ambos miembros por $3(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1})$.

$$\frac{x+y+z}{3}\cdot 3(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}) \geq \frac{3}{x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}}\cdot 3(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1})$$

$$(x+y+z).(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}) \geq 9$$

$$\therefore \quad (x+y+z).(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1})_{\text{mín}} = 9$$

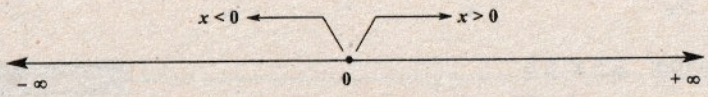
4. EL INTERVALO

4.1 Definición

Es un conjunto cuyos elementos son números reales. Los elementos del intervalo se encuentran contenidos entre dos números fijos llamados extremos, en determinados casos los extremos forman parte del intervalo.

4.1A) Interpretación geométrica de los números reales:

Los números reales se representan gráficamente por una recta, dicha recta es llamada RECTA REAL.



i) A cada punto de la recta le corresponde un número real

ii) A cada número real le corresponde un único punto de la recta.

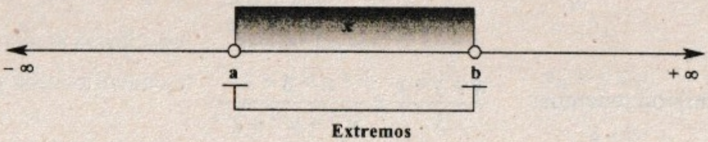
Por tanto queda así establecido una biyección entre el conjunto **P** de todos los puntos de la recta y el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales.

4.2 Clases de intervalos

4.2A) Intervalo abierto:

No considera a los valores extremos, se presenta por existencia de algún signo de

relación simple y su representación en la recta real es:

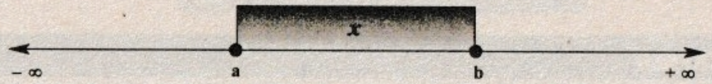


Interpretación: $a < x < b$

Notación: $x \in]\, a \,;\, b\, [$ o también $x \in \langle a \,;\, b \rangle$

4.2B) Intervalo cerrado:

Considera a los valores extremos, se presenta por existencia de algún signo de relación doble y su representación en la recta real es:



Interpretación: $a \leq x \leq b$

Notación: $x \in [a \,;\, b]$ o también $x \in (a \,;\, b)$

4.2C) Intervalo semiabierto:

También llamado semi cerrado o mixto, resulta de combinar a los extremos de los intervalos vistos anteriormente, veamos un ejemplo:

Interpretación: $a < x \leq b$

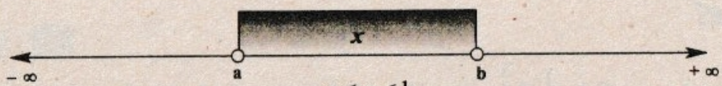
Notación: $x \in \langle a \,;\, b]$

Observación

El conjunto de los números reales $\mathbb{R} = \langle -\infty \,;\, +\infty \rangle$ es un intervalo abierto, en consecuencia $-\infty$ y $+\infty$ no son números reales.

4.3) Intervalos acotados :

Son todos aquellos intervalos cuyos extremos son números reales, pueden ser abiertos, cerrados o semiabiertos. Los extremos reciben el nombre de **cotas**.



$a < x < b$

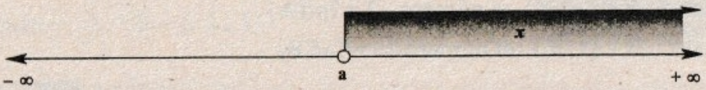
a o cualquier otro número menor que **a** es una cota inferior

b o cualquier otro número mayor que **b** es una cota superior

4.4) Intervalos no acotados

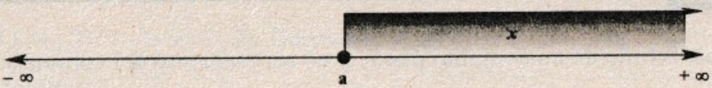
Son todos aquellos intervalos donde al menos uno de sus extremos es $-\infty$ ó $+\infty$

4.4A) Intervalo acotado inferiormente:



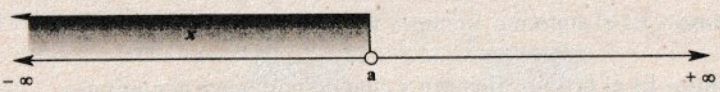
; $x > a$

a es una cota inferior



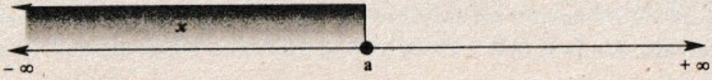
; $x \geq a$

4.4B) Intervalo acotado superiormente:



; $x < a$

a es una cota superior.



; $x \leq a$

Observaciones

i) Un intervalo de extremos "a" y "b" ($a \neq b$) tiene infinitos elementos.

ii) Formalmente decimos que un intervalo es acotado si esta acotado inferiormente y superiormente a la vez.

iii) La longitud de un intervalo acotado (L.I) de extremos a y b tal que $a < b$ se calcula así: $LI = b - a$

4.5) Supremo e ínfimo de un conjunto.

4.5A) Supremo: Lo designamos por Sup = **S** y lo definimos como la menor de las cotas superiores.

Ejemplos

En el intervalo: $A = \left\langle -\frac{1}{4};7 \right]$, el número 7 = Sup(A)

En el intervalo: $B = \langle -\infty ; 4 \rangle$, el número 4 = Sup(B)

4.5B) Ínfimo.- Lo designamos por Inf = **C** y lo definimos como la mayor de las cotas inferiores.

Ejemplos

En el intervalo: $A = \langle -2; 4 \rangle$, el número -2 = Inf(A)

En el intervalo: $B = [1; \infty \rangle$, el número 1 = Inf(B)

Observación

El supremo e ínfimo de un conjunto puede o no ser elemento del conjunto.

4.6) Máximo y mínimo de un conjunto.

4.6A) Máximo.- Es el supremo, siempre y cuando pertenece al conjunto.

4.6B) Mínimo.- Es el ínfimo, siempre y cuando pertenece al conjunto.

Ejemplos

En el intervalo: $A = [-3; 2]$

-3 = mínimo de A, pues $-3 = \text{Inf}(A) \wedge -3 \in A$

2 = máximo de A, pues $2 = \text{Sup}(A) \wedge 2 \in A$

En el intervalo: $B = \left\langle \frac{1}{2} ; 5 \right]$ se observa que tiene máximo pero no mínimo.

5 = máximo de B, pues $5 = \text{Sup}(B) \wedge 5 \in B$

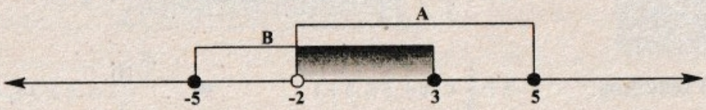
$\frac{1}{2} = \text{Inf}(B)$; $\frac{1}{2} \notin B$ "No existe mínimo"

Ejercicio 18

Si $A = \langle -2 ; 5]$ y $B = [-5 ; 3]$. Determine la longitud de $A \cap B$

Resolución

En la recta real tenemos:



De donde: $A \cap B = \langle -2 ; 3]$ $\therefore$ $\boxed{LI = 3 - (-2) = 5}$

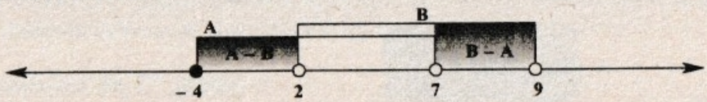
Ejercicio 19

Si $A = [-4 ; 7\rangle$ y $B = \langle 2 ; 9\rangle$. Determine $A \Delta B$

Resolución:

Tener en cuenta que $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

En la recta real tenemos:



Observa que si del conjunto **A** retiramos todos los elementos de **B**, el elemento 2 se queda en A, pues dicho elemento no pertenece a **B**.

Asimismo si del conjunto **B** retiramos todos los elementos de **A**, el elemento 7 se queda en **B**, pues dicho elemento no pertenece a **A**.

Ahora tenemos: $A - B = [-4 ; 2]$ y $B - A = [7; 9\rangle$

$$\therefore \boxed{A \Delta B = [-4; 2] \cup [7 ; 9\rangle}$$

Ejercicio 20

Determine la suma del infimo con el supremo del conjunto al cual pertenece $\dfrac{x+2}{x+3}$,

sabiendo que $x \in \left\langle \dfrac{1}{3} \; ; \; 1 \right]$

Resolución:

Observa que: $\dfrac{x+2}{x+3}=\dfrac{(x+3)-1}{x+3}=1-\dfrac{1}{x+3}$

Por condición: $x\in\left\langle\dfrac{1}{3}\ ;\ 1\right] \longleftrightarrow \dfrac{1}{3}<x\leq 1$

Sumando 3 tenemos: $3+\dfrac{1}{3}<x+3\leq 3+1 \Rightarrow \dfrac{10}{3}<x+3\leq 4$

Tomando recíproco: $\dfrac{1}{4}\leq\dfrac{1}{x+3}<\dfrac{3}{10}$

Multiplicando por -1: $-\dfrac{3}{10}<-\dfrac{1}{x+3}\leq-\dfrac{1}{4}$

Sumando 1 tenemos: $1-\dfrac{3}{10}<1-\dfrac{1}{x+3}\leq 1-\dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{7}{10}<\dfrac{x+2}{x+3}\leq\dfrac{3}{4}$

Observa que: Ínfimo $=\dfrac{7}{10}$ y Supremo $=\dfrac{3}{4}$

$$\therefore\ \text{Inf}+\text{Sup}=\frac{29}{20}$$

5. INECUACIONES CON UNA SOLA INCÓGNITA

5.1. Inecuación:

Es toda desigualdad relativa.

5.2. Inecuación Racional:

Es la desigualdad relativa que se establece entre expresiones racionales

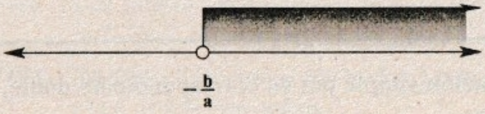
5.2A) Inecuación de 1er grado:

$$ax+b \gtrless 0$$

Donde: $x=$ Incógnita; a, b $\in\mathbb{R}$ / a $\neq 0$

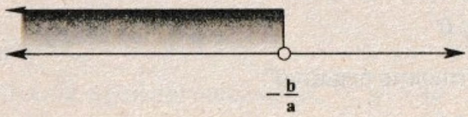
Resolución de la inecuación:

Con $ax + b > 0 \,;\, a > 0 \;\Rightarrow\; ax + b = 0 \;\Rightarrow\; x = -\dfrac{b}{a}$



$$\therefore \quad C.S. = \left\langle -\frac{b}{a} \,;\, \infty \right\rangle$$

Con $ax + b < 0 \,;\, a > 0 \;\Rightarrow\; ax + b = 0 \;\Rightarrow\; x = -\dfrac{b}{a}$



$$\therefore \quad C.S. = \left\langle -\infty \,;\, -\frac{b}{a} \right\rangle$$

Observación

En caso de sustituir al signo de relación simple por su correspondencia doble (> por ≥ o < por ≤) debemos cerrar al corte del extremo real.

5.2B) Inecuación de 2do grado:

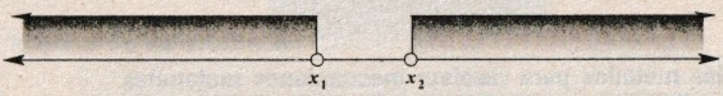
$$ax^2 + bx + c \gtrless 0$$

Donde: x = incógnita; a, b, c $\in \mathbb{R} / a \neq 0$

Resolución de la inecuación:

Con $\quad ax^2 + bx + c > 0 \,;\, a > 0 \,\wedge\, b^2 - 4ac \geq 0$

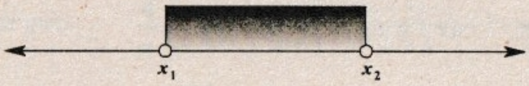
$\quad ax^2 + bx + c = 0 \,;\, CS = \{x_1 \,;\, x_2\}$



$$\therefore \quad CS = \langle -\infty \,;\, x_1 \rangle \cup \langle x_2 \,;\, \infty \rangle$$

Con $\quad ax^2 + bx + c < 0 \,;\, a > 0 \,\wedge\, b^2 - 4ac \geq 0$

$$ax^2 + bx + c = 0 \;;\; CS = \{x_1 ; x_2\}$$



$\therefore$ $C.S. = \langle x_1 ; x_2 \rangle$

Observación

En caso de sustituir al signo de relación simple por su correspondiente doble, debemos cerrar los cortes de los extremos.

Propiedades:

i) Si $ax^2 + bx + c > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$ "Trinomio positivo"

Entonces: $a > 0 \;\wedge\; b^2 - 4ac < 0$

ii) Si $ax^2 + bx + c < 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$ "Trinomio negativo"

Entonces: $a < 0 \;\wedge\; b^2 - 4ac < 0$

5.2C) Inecuación de grado superior al segundo:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots\dots\dots + a_{n-1}x + a_n \gtrless 0$$

Donde: x = Incógnita; $a_0, a_1, a_2, \dots\dots \wedge a_n \in \mathbb{R} \,/\, a_0 \neq 0$ $\quad n \in \mathbb{N} \,/\, n \geq 3$

Observación

A todas las inecuaciones vistas anteriormente se les da el nombre de **Inecuaciones polinomiales.**

5.2D) Inecuación fraccionaria:

$$\frac{F(x)}{H(x)} \gtrless 0 \;;\; [H]^{\circ} \geq 1$$

5.3. Principales métodos para resolver inecuaciones racionales

5.3A) Método de los puntos de corte

1º paso: Se trasladan todos los términos de la inecuación al primer miembro, obteniendo siempre una expresión de coeficiente principal positivo.

2º paso: Se factoriza totalmente a la expresión obtenida, en caso de ser fraccionaria se factoriza a cada término.

3º Paso: Se calculan los puntos de corte, son los valores reales de la incógnita obtenidos al igualar cada factor primo a cero.

4º Paso: Los puntos obtenidos en el paso anterior se ubican ordenadamente en la recta real, dichos puntos originan 2 o más zonas.

5º Paso Se marcan las zonas obtenidas a partir de la derecha, alternando los signos (+) y (–) en ese orden.

6º Paso: Si el signo de relación una vez ejecutado el **1º** paso es $>$ ó $\geq$ el conjunto solución estará representado por la unión de todas las zonas positivas, pero si el signo de relación es $<$ ó $\leq$ el conjunto solución estará representado por la unión de todas las zonas negativas.

Ejemplo

Resolver la siguiente inecuación: $x^3 > 4x$

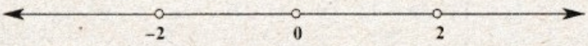
1º Paso: $x^3 - 4x > 0$

2º Paso: $x.(x^2 - 4) > 0 \Rightarrow x.(x+2).(x-2) > 0$

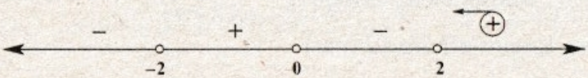
3º Paso: $x = 0$; $x + 2 = 0$; $x - 2 = 0$

$x = 0$; $x = -2$; $x = 2$

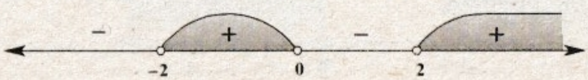
4º Paso:



5º Paso:



6º Paso:



$\therefore$ C.S. $= \langle -2 ; 0\rangle \cup \langle 2 ; \infty\rangle$

5.3B) Método de los puntos de referencia

1º Paso: Expresar la desigualdad racional del modo siguiente $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \gtrless 0$, con los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ de coeficiente principal positivo, totalmente factorizados.

2º Paso: Se determinan todas las raíces reales de ambos polinomios y se ubican ordenadamente en la recta real.

3º Paso: Iniciando sobre la recta, de derecha a izquierda se traza una curva que pasará por todos los puntos marcados, teniendo en cuenta que si la raíz es simple o de multiplicidad impar la curva cruza a la recta, pero si la raíz es de multiplicidad par la curva se queda por el mismo lado de la recta (rebota).

4º Paso: Se eligen los intervalos de acuerdo con el sentido de la desigualdad.

i) $\dfrac{P(x)}{Q(x)} > 0$, considera únicamente a los intervalos ubicados por encima de la recta.

ii) $\dfrac{P(x)}{Q(x)} < 0$, considera únicamente a los intervalos ubicados por debajo de la recta.

La unión de todos los intervalos en cada caso será el conjunto solución.

Ejemplo

Resolver la siguiente inecuación: $x^6 + x^5 < x^4 + x^3$

Resolución:

1º Paso:

$$x^6 + x^5 - x^4 - x^3 < 0 \quad \Rightarrow \quad x^3(x^3 + x^2 - x - 1) < 0$$

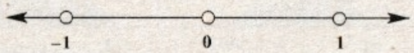
$$x^3[x^2(x+1) - (x+1)] < 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 \cdot (x+1) \cdot (x^2 - 1) < 0$$

$$x^3 \cdot (x+1) \cdot (x+1) \cdot (x-1) < 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 \cdot (x+1)^2 \cdot (x-1) < 0$$

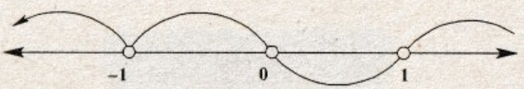
2º Paso: $x = 0$; multiplicidad 3 (impar)

$x = -1$; multiplicidad 2 (par)

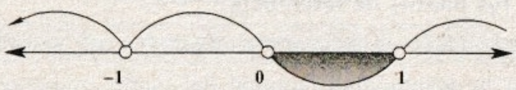
$x = 1$; simple



3º Paso:



4º Paso:



$\therefore$ C.S. $= \langle 0 ; 1 \rangle$

Ejercicio 21

Resolver: $\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{3-x}{3}\geq\dfrac{3x+2}{6}$

Resolución:

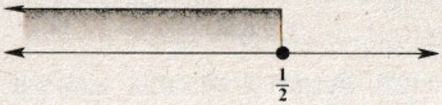
Multiplicando por 6:

$$3(x-1)+2(3-x)\geq 3x+2 \quad\longleftrightarrow\quad 3x-3+6-2x\geq 3x+2$$

$$x+3\geq 3x+2 \quad\longleftrightarrow\quad -2x+1\geq 0$$

Multiplicando por –1: $\quad 2x-1\leq 0 \quad\longleftrightarrow\quad 2x-1=0$

$$x=\frac{1}{2}$$



$\therefore\quad$ C.S. $=\left\langle -\infty\,;\ \dfrac{1}{2}\right]$

Ejercicio 22

Resolver: $\quad -x^2-x+2<0$

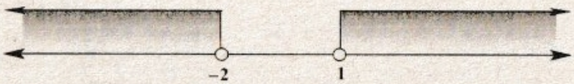
Resolución:

Multiplicando por –1: $\quad x^2+x-2>0 \quad\Rightarrow\quad x^2+x-2=0$

$$(x+2)(x-1)=0 \quad\Rightarrow\quad x+2=0 \quad\vee\quad x-1=0$$

$$x=-2 \quad\vee\quad x=1$$

En la recta real:



$\therefore\quad$ C.S. $=\langle -\infty\,;-2\rangle\cup\langle 1\,;\infty\rangle$

Ejercicio 23

Determine la suma de todos los valores enteros que asume x en: $\quad x^2\leq 2x+8$

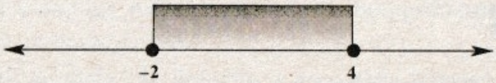
Resolución:

La inecuación dada es : $\quad x^2-2x-8\leq 0 \quad\Rightarrow\quad x^2-2x-8=0$

$$(x-4)(x+2)=0 \quad\Rightarrow\quad x-4=0 \quad\vee\quad x+2=0$$

$$x=4 \quad\vee\quad x=-2$$

En la recta real:



Valores enteros de x: $-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$

$\therefore$ Σ de valores 7

Ejercicio 24

Resolver: $x^4 + x^3 + 2x^2 > 7x + 5$

Resolución

La inecuación dada es: $x^4 + x^3 + 2x^2 - 7x - 5 > 0$ ....(1)

$$\underbrace{x^4 + x^3 + 2x^2 - 7x - 5}_{\text{Por aspa doble especial}} = 0$$

$$(x^2 + 2x + 5).(x^2 - x - 1) = 0$$

Observa que: $x^2 + 2x + 5 > 0$, pues: $\Delta = (2)^2 - 4(1)(5) = -16 < 0 \ \wedge \ a = 1 > 0$

Luego en (1) tenemos: $\underbrace{(x^2 + 2x + 5)}_{\oplus \forall x \in \mathbb{R}}.(x^2 - x - 1) > 0$

Ahora sólo debemos resolver: $x^2 - x - 1 > 0$

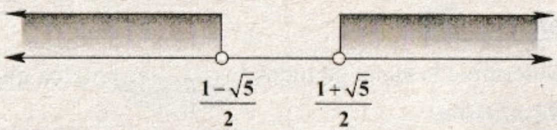
$$x^2 - x - 1 = 0$$

De acuerdo con la fórmula de Carnot: $x_{1;2} = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$

$$x_{1;2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad ; \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

En la recta real tenemos:



$$\therefore \quad C.S. = \left\langle -\infty \ ; \ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ ; \ \infty \right\rangle$$

Ejercicio 25

Si el conjunto solución de la inecuación: $10x^2 - 9 \geq x^4$

Es [a ; b] ∪ [c ; d]. Calcular a – b + c – d ; a < d

Resolución:

De acuerdo con el método de los puntos de corte procedemos de la manera siguiente:

$$-x^4 + 10x^2 - 9 \geq 0$$

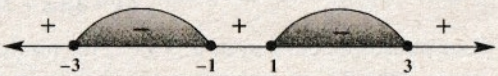
$$x^4 - 10x^2 + 9 \leq 0$$

$$(x^2 - 9) \cdot (x^2 - 1) \leq 0$$

$$(x+3)(x-3)(x+1)(x-1) \leq 0$$

Los puntos obtenidos son: $-3;\ 3;\ -1$ y 1

En la recta real tenemos:



Observa que: C.S. = $[-3; -1] \cup [1 ; 3]$

De donde tenemos: a = – 3 ; b = – 1 ; c = 1 ; d = 3

$\therefore$ **a – b + c – d = – 4**

Ejercicio 26

Resolver: $\dfrac{5x+7}{x-1} > \dfrac{3x}{x-1}$

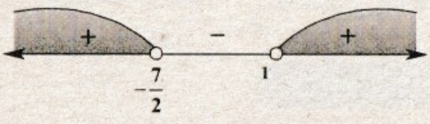
Resolución:

La inecuación dada es : $\dfrac{5x+7}{x-1} - \dfrac{3x}{x-1} > 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{2x+7}{x-1} > 0$

Hallemos los puntos: $2x + 7 = 0 \quad ; \quad x - 1 = 0$

$$x = -\frac{7}{2} \quad ; \quad x = 1$$

En la recta real:



$\therefore$ $\text{C.S.} = \left\langle -\infty \; ; \; -\dfrac{7}{2} \right\rangle \cup \langle 1 \; ; \infty \rangle$

Ejercicio 27

Resolver: $\dfrac{3x^2 - x - 18}{x^2 - x - 6} \leq 3$

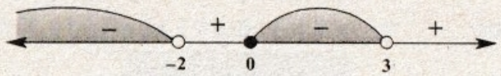
Resolución:

La inecuación dada es: $\dfrac{3x^2 - x - 18}{x^2 - x - 6} - 3 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{3x^2 - x - 18 - 3x^2 + 3x + 18}{x^2 - x - 6} \leq 0$

$$\frac{2x}{x^2 - x - 6} \leq 0$$

Factorizando el denominador: $\dfrac{2x}{(x-3)(x+2)} \leq 0$

Los puntos de corte son: 0; 3 y –2, los puntos 3 y –2 provienen del denominador y por tanto deberán ser extremos abiertos pues de ser cerrados no existiría la expresión fraccionaria.



$\therefore$ C.S. $= \langle -\infty ; -2 \rangle \cup [0 ; 3\rangle$

Ejercicio 28

Resolver: $x^3 + x^2 \geq 4x + 4$

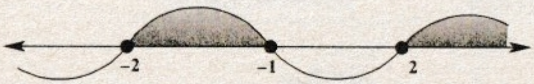
Resolución:

Teniendo en cuenta al método de los puntos de referencia procedemos así:

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2(x+1) - 4(x+1) \geq 0$$

$$(x+1)\cdot(x^2 - 4) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-2) \geq 0$$

Observar que los puntos son: –1; –2 y 2

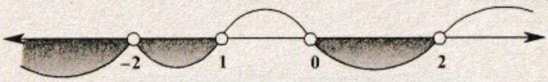


$\therefore$ C.S. $= [-2 ; -1] \cup [2 ; \infty\rangle$

Ejercicio 29

Resolver: $$\frac{(x-1)^7(x+2)^8x}{(x-2)^5}<0$$

Resolución:
Una rápida inspección permite apreciar que los puntos son: 1, –2; 0 y 2, luego en la recta.



$\therefore$ C.S. $= \langle -\infty; -2\rangle \cup \langle -2 ; 1\rangle \cup \langle 0 ; 2\rangle$

Ejercicio 30

Resolver: $(x-3)^4(x+1)^5(x-2)^6 \geq 0$

Resolución:

En la recta real:

$\therefore$ C.S. $= [-1; \infty\rangle$

5.4. Inecuaciones Irracionales:

5.4A) Primera forma: $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

Si $\sqrt[2n+1]{A} \gtrless B$

Se resuelve: $A \gtrless B^{2n+1}$

5.4B) Segunda forma: $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

Si $\sqrt[2n]{A} > B$

Se resuelve (S_1): $A \geq 0 \;\wedge\; B \geq 0 \;\wedge\; A > B^{2n}$

Se resuelve (S_2): $A \geq 0 \;\wedge\; B < 0$

Siendo el CS: $S_1 \cup S_2$

5.4C) Tercera forma: $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

Si $\sqrt[2n]{A} < B$

Se resuelve: $A \geq 0 \ \wedge \ B > 0 \ \wedge \ A < B^{2n}$

Ejercicio 31

Resolver: $\sqrt[3]{x^3 - 1} < x - 1$

Resolución:

La inecuación dada es: $\sqrt[3]{x^3 - 1} < x - 1$

Elevando al cubo tenemos:

$$x^3 - 1 < (x-1)^3 \Rightarrow x^3 - 1 < x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$3x^2 - 3x < 0 \Rightarrow 3x(x-1) < 0$$

De donde al simplificar: $x(x-1) < 0$

$\therefore$ C.S. $= \langle 0 ; 1 \rangle$

Ejercicio 32

Resolver: $\sqrt{4 - x^2} < 1$

Resolución:

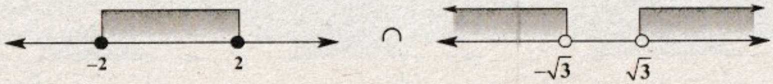
De acuerdo con la teoría debemos plantear los siguientes casos

$$4 - x^2 \geq 0 \ \wedge \ 1 > 0 \ \wedge \ 4 - x^2 < 1$$

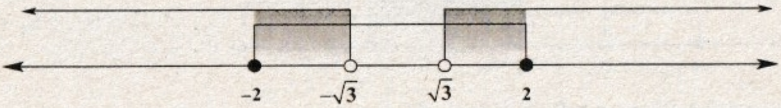
$$x^2 - 4 \leq 0 \ \wedge \ \mathbb{R} \ \wedge \ x^2 - 4 > -1$$

De donde tenemos: $x^2 - 4 \leq 0 \ \wedge \ x^2 - 3 > 0$

$$(x+2)(x-2) \leq 0 \ \wedge \ (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) > 0$$



Ahora intersectando:



$$\therefore \quad C.S. = [-2; -\sqrt{3}\,\rangle \;\cup\; \langle\sqrt{3}\,;\, 2]$$

Ejercicio 33

Resolver: $\sqrt{2-x-x^2} > -2014$

Resolución:

Una rápida inspección permite apreciar que para resolver este ejercicio es necesario plantear sólo S_2 (B < 0), luego:

$$2 - x - x^2 \geq 0$$
$$x^2 + x - 2 \leq 0$$
$$(x+2)(x-1) \leq 0$$

$$\therefore \quad C.S. = [-2\,;\,1]$$

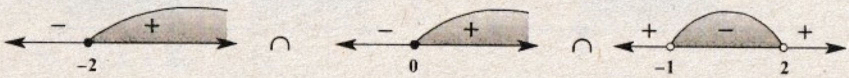
Ejercicio 34

Resolver: $\sqrt{x+2} > x$

Resolución:

De acuerdo con la teoria procedemos de la manera siguiente:

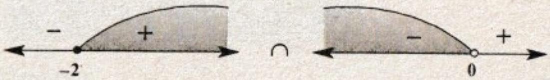
$$S_1 \qquad x+2 \geq 0 \quad \wedge \quad x \geq 0 \quad \wedge \quad x+2 > x^2$$
$$x+2 \geq 0 \quad \wedge \quad x \geq 0 \quad \wedge \quad -x^2+x+2 > 0$$
$$x+2 \geq 0 \quad \wedge \quad x \geq 0 \quad \wedge \quad x^2-x-2 < 0$$
$$x+2 \geq 0 \quad \wedge \quad x \geq 0 \quad \wedge \quad (x-2)(x+1) < 0$$



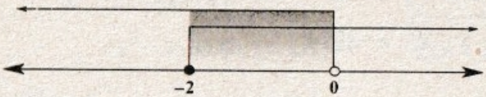
Intersectando:

$\Longrightarrow \quad S_1 = [0\,;\,2\rangle$

$S_2 \qquad x + 2 \geq 0 \;\wedge\; x < 0$



Intersectando:



$\Longrightarrow \quad S_2 = [-2\,;\,0\rangle$

Finalmente tenemos: $\qquad C.S. = S_1 \cup S_2$

$$\therefore \qquad C.S. = [-2\,;\,2\,\rangle$$

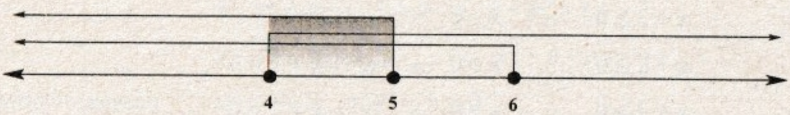
Ejercicio 35

Resolver: $\qquad \sqrt{x-4} \leq \sqrt{6-x}$

Resolución:

Por existencia de las expresiones irracionales dentro del conjunto $\mathbb{R}$, se plantea:

$$x-4 \geq 0 \quad \wedge \quad 6-x \geq 0 \quad \wedge \quad x-4 \leq 6-x$$
$$x-4 \geq 0 \quad \wedge \quad x-6 \leq 0 \quad \wedge \quad 2x-10 \leq 0$$
$$x-4 \geq 0 \quad \wedge \quad x-6 \leq 0 \quad \wedge \quad x \leq 5$$

Finalmente en la recta real tenemos:

$$\therefore \qquad C.S. = [4\,;\,5]$$

6. VALOR ABSOLUTO (V . A.)

6.1 Definición:

Si $x \in \mathbb{R}$, el valor absoluto de x denotado por $|x|$ es la relación funcional definida de la manera siguiente:

$$|x| = \begin{cases} x & ; \ x > 0 \\ 0 & ; \ x = 0 \\ -x & ; \ x < 0 \end{cases}$$

De acuerdo con la definición: $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x|$ es no negativo. Veamos algunos ejemplos:

$$|7| = 7 \ ; \ |0| = 0 \ ; \ |-7| = -(-7) = 7$$

6.2. Teoremas: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, se tiene:

6.2A) $|x| \geq 0$

6.2B) $x \leq |x|$

6.2C) $|x| = |-x|$

6.2D) $|x^2| = |x|^2 = x^2$

6.2E) $\sqrt{x^2} = |x|$

6.2F) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

6.2G) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \ ; \ y \neq 0$

6.2H) $|x + y| \leq |x| + |y|$ ... (Desigualdad triangular)

6.3 Propiedades:

6.3A) Si $|x + y| = |x| + |y|$, entonces : $xy \geq 0$

6.3B) Si $|x - y| = |x| + |y|$, entonces: $xy \leq 0$

6.4 Ecuaciones con valor absoluto.

6.4A) Forma general:

$$|x| = b \longleftrightarrow b \geq 0 \wedge (x = b \vee x = -b)$$

6.4B) Forma alternativa:

$$|x| = |y| \longleftrightarrow (x+y)(x-y) = 0$$

6.5 Inecuaciones con valor absoluto:

6.5A) Primera forma:

$$|x| > b \longleftrightarrow x > b \vee x < -b$$

6.5B) Segunda forma:

$$|x| < b \longleftrightarrow b > 0 \wedge (-b < x < b)$$

6.5C) Tercera forma:

$$|x| \gtrless |y| \longleftrightarrow (x+y)\cdot(x-y) \gtrless 0$$

Ejercicio 36

Demostrar que: $|x| = |-x|$; $\forall x \in \mathbb{R}$

Resolución:

Como $x \in \mathbb{R}$; $x < 0 \vee x \geq 0$

i) Si $x < 0$, entonces: $|x| = -x$
Si $-x > 0$, entonces: $|-x| = -x$ ⇒ $|x| = |-x|$

ii) Si $x \geq 0$, entonces: $|x| = x$
Si $-x \leq 0$, entonces: $|-x| = -(-x)$
$|-x| = x$ ⇒ $|x| = |-x|$

$$\therefore \quad |x| = |-x| ; \forall x \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 37

Demostrar que: $|x^2| = x^2 = |x|^2$; $\forall x \in \mathbb{R}$

Resolución:

i) Como: $x^2 \geq 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$, entonces: $|x^2| = x^2$

ii) Si $x \geq 0$, entonces: $|x| = x$

$|x|^2 = x^2$

iii) Si $x < 0$, entonces; $-x > 0$ ➡ $|-x| = -x$

Por el teorema anterior: $|x| = -x$ ➡ $|x|^2 = (-x)^2$

$|x|^2 = x^2$

$\therefore$ $|x^2| = x^2 = |x|^2 ; \forall x \in \mathbb{R}$ *Lqqd*

Ejercicio 38

Demostrar que: $\sqrt{x^2} = |x| ; \forall x \in \mathbb{R}$

Resolución:

Partiendo de: $|x| \geq 0 ; \forall x \in \mathbb{R}$

Por teorema: $x^2 = |x|^2$ ➡ $\sqrt{x^2} = \sqrt{|x|^2}$

$\therefore$ $\sqrt{x^2} = |x| ; \forall x \in \mathbb{R}$ *Lqqd*

Ejercicio 39

Demostrar que: $|x + y| \leq |x| + |y| ; \forall x, y \in \mathbb{R}$

Resolución:

Se sabe que: $xy \leq |xy| ; \forall x, y \in \mathbb{R}$

$xy \leq |x| . |y|$

Multiplicando por 2: $2xy \leq 2|x| . |y|$

Por ley aditiva: $x^2 + y^2 + 2xy \leq x^2 + y^2 + 2|x| . |y|$

Por teorema: $x^2 + y^2 + 2xy \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x| . |y|$

$(x + y)^2 \leq (|x| + |y|)^2$

$\sqrt{(x + y)^2} \leq \sqrt{(|x| + |y|)^2}$

$\therefore$ $|x + y| \leq |x| + |y| ; \forall x, y \in \mathbb{R}$ *Lqqd*

Ejercicio 40

Demostrar que: $||x|-|y|| \leq |x-y|$; $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Resolución:

Como: $|x|$; $|y| \in \mathbb{R}$, de acuerdo con la ley de tricotomia podemos plantear lo siguiente:

$$|x|<|y| \quad \vee \quad |x| \geq |y|$$
$$|x|-|y|<0 \quad \vee \quad |x|-|y| \geq 0$$
$$|y|-|x|>0 \quad \vee \quad |x|-|y| \geq 0$$

Ahora planteamos el siguiente artificio: $x=(x-y)+y$

De donde tenemos: $|x|=|(x-y)+y|$

$$|x| \leq |x-y|+|y|$$
$$|x|-|y| \leq |x-y| \qquad ...(1)$$

Por otro lado también podemos plantear: $y=(y-x)+x$

De donde tenemos: $|y|=|(y-x)+x|$

$$|y| \leq |y-x|+|x|$$
$$|y|-|x| \leq |y-x|$$
$$|y|-|x| \leq |x-y| \qquad ...(2)$$

Si $|y|-|x|>0$, entonces: $||y|-|x||=|y|-|x|$

Ahora en (2) tenemos lo siguiente: $||y|-|x|| \leq |x-y| \qquad ...(3)$

Si $|x|-|y| \geq 0$, entonces: $||x|-|y||=|x|-|y|$

Ahora en (1) tenemos lo siguiente: $||x|-|y|| \leq |x-y| \qquad ....(4)$

Finalmente de (3) y (4):

$$||x|-|y|| \leq |x-y| \ ; \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 41

Resolver: $|2x-3|=10$

Resolución:

De acuerdo con la teoría, planteamos lo siguiente:

$$2x-3=10 \quad \vee \quad 2x-3=-10$$
$$2x=13 \quad \vee \quad 2x=-7$$
$$x=\frac{13}{2} \quad \vee \quad x=-\frac{7}{2} \qquad \therefore \qquad C.S.=\left\{-\frac{7}{2} ; \frac{13}{2}\right\}$$

Ejercicio 42

Resolver: $|x+1| = 2x-1$

Resolución:

Se cumple: $2x-1 \geq 0 \;\wedge\; (x+1 = 2x-1 \;\vee\; x+1 = 1-2x)$

$$2x \geq 1 \;\wedge\; (-x = -2 \;\vee\; 3x = 0)$$

$$x \geq \frac{1}{2} \;\wedge (x = 2 \;\vee\; x = 0)$$

De donde tenemos: $x = 2$ $\therefore$ C.S. $= \{2\}$

Ejercicio 43

Resolver: $|2x+3| > 4$

Resolución:

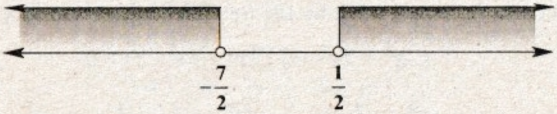
De acuerdo con la teoría, podemos plantear lo siguiente:

$$2x+3 > 4 \;\vee\; 2x+3 < -4$$

$$2x > 1 \;\vee\; 2x < -7$$

$$x > \frac{1}{2} \;\vee\; x < -\frac{7}{2}$$

En la recta real



$$\therefore \quad \text{C.S.} = \left\langle -\infty \;;\; -\frac{7}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2} \;;\; \infty \right\rangle$$

Ejercicio 44

Resolver: $|x^2-6x+8| \leq 4-x$

Resolución:

De acuerdo con la teoría, se cumple:

$$4-x \geq 0 \;\wedge\; -(4-x) \leq x^2-6x+8 \leq (4-x)$$

$$x-4 \leq 0 \;\wedge\; \underbrace{x-4 \leq x^2-6x+8 \leq 4-x}_{*} \qquad ....(1)$$

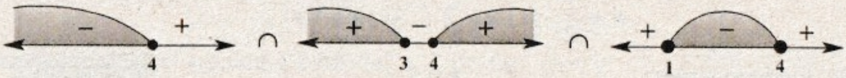
$$* \quad x^2 - 6x + 8 \geq x - 4 \quad \wedge \quad x^2 - 6x + 8 \leq 4 - x$$

$$x^2 - 7x + 12 \geq 0 \quad \wedge \quad x^2 - 5x + 4 \leq 0$$

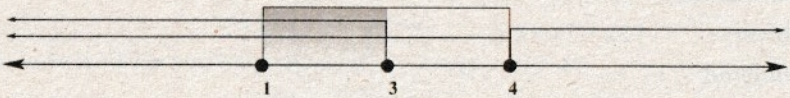
$$(x-4)(x-3) \geq 0 \quad \wedge \quad (x-4)(x-1) \leq 0 \qquad \text{....... (2)}$$

Reemplazando (2) en (1) tenemos:

$$x - 4 \leq 0 \quad \wedge \quad (x-4)(x-3) \geq 0 \quad \wedge \quad (x-4)(x-1) \leq 0$$



Ahora en la intersección obtenemos:



$$\therefore \quad \text{C.S.} = [1\,;3] \cup \{4\}$$

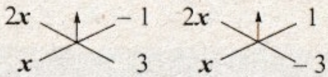
Ejercicio 45

Resolver : $\quad |2x^2 - 3| > |5x|$

Resolución:

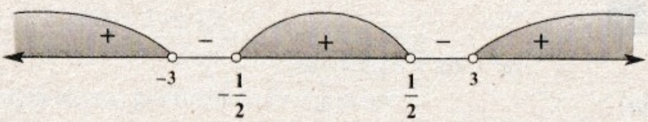
De acuerdo con la tercera forma de las inecuaciones con valor absoluto tenemos:

$$(2x^2 + 5x - 3).(2x^2 - 5x - 3) > 0$$



$$(2x-1)(x+3)(2x+1)(x-3) > 0$$

Ahora en la recta real:



$$\therefore \quad \text{C.S.} = \langle -\infty\,; -3\rangle \cup \left\langle -\frac{1}{2}\;;\;\frac{1}{2}\right\rangle \cup \langle 3\,;\infty\rangle$$

7. MÁXIMO ENTERO

7.1. Defininción:

El máximo entero de un número real "x" denotado por $[\![x]\!]$, se define como el mayor entero no mayor que "x"

$$[\![x]\!] = \text{máx}\,\{m \in \mathbb{Z} \,/\, m \leq x\}$$

Ejemplos

$[\![2,4]\!] = 2$ ¿Por qué? Porque 2 es el mayor valor entero que no es mayor que 2,4 ($2 \leq 2,4$)

$[\![7]\!] = 7$ ¿Por qué? Porque 7 es el mayor valor entero que no es mayor que 7 ($7 \leq 7$)

$[\![-3,7]\!] = -4$, observa que $-4 \leq -3,7$

7.2. Teoremas:

7.2A) $\forall x \in \mathbb{R}$: $[\![x]\!] \in \mathbb{Z}$

7.2B) $\forall x \in \mathbb{R}$: $[\![x]\!] \leq x < [\![x]\!] + 1$

7.2C) $x \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{Z}$: $[\![x]\!] = n \leftrightarrow n \leq x < n+1$

7.2D) $x \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{Z}$:

$$[\![x]\!] \leq n \leftrightarrow x < n+1$$

$$[\![x]\!] < n \leftrightarrow x < n$$

$$[\![x]\!] \geq n \leftrightarrow x \geq n$$

$$[\![x]\!] > n \leftrightarrow x \geq n+1$$

7.2E) $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $[\![x+y]\!] \geq [\![x]\!] + [\![y]\!]$

7.3. Propiedades:

7.3A) $\forall x \in \mathbb{Z}$: $[\![x]\!] = x$

Asimismo: $[\![\,[\![x]\!]\,]\!] = [\![x]\!]$

7.3B) $x \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{Z}$: $[\![x+n]\!] = [\![x]\!] + n$

7.3C) $[\![x]\!] + [\![-x]\!] = \begin{cases} 0 \,;\, x \in \mathbb{Z} \\ -1 \,;\, x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

7.3D) $x \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{Z}^{+}$: $\left[\!\left[\dfrac{[\![x]\!]}{n} \right]\!\right] = \left[\!\left[\dfrac{x}{n} \right]\!\right]$

Ejercicio 46

Demostrar que: $\forall x \in \mathbb{R}$: $[\![x]\!] \leq x < [\![x]\!] + 1$

Resolución:

Por definición $[\![x]\!]$ es el mayor de todos los enteros que no son mayores que x ($[\![x]\!] \leq x$), de donde: $[\![x]\!] + 1 > x$; pues de lo contrario: $[\![x]\!] + 1 \leq x$, y esto es una contradicción dado que $[\![x]\!] + 1 \in \mathbb{Z}$ ya que sería absurdo plantear: $[\![x]\!] + 1 \leq [\![x]\!] \longleftrightarrow (1 \leq 0)$.

$$\therefore \quad [\![x]\!] \leq x < [\![x]\!] + 1 \qquad \textit{Lqqd}$$

Ejercicio 47

Demostrar que: $[\![x]\!] = n \longleftrightarrow (n \in \mathbb{Z} \wedge n \leq x < n + 1)$

Resolución:

i) De izquierda a derecha ($\rightarrow$)

Si $[\![x]\!] = n$, es evidente que $n \in \mathbb{Z}$; de acuerdo con el teorema demostrado en el ejercicio anterior podemos plantear:

$$[\![x]\!] \leq x < [\![x]\!] + 1$$

De donde tenemos: $n \leq x < n + 1$

ii) De derecha a izquierda ($\leftarrow$)

Si $n \in \mathbb{Z}$ y $n \leq x < n + 1$, es evidente que: $n = [\![x]\!]$ pues $n \leq x$ y **n** es el máximo de todos los enteros **n** tales que $n \leq x$, ya que $x < n + 1$

$$\therefore \quad [\![x]\!] = n \longleftrightarrow (n \in \mathbb{Z} \wedge n \leq x < n + 1)$$

Ejercicio 48

Resolver: $[\![2x + 3]\!] = 7$

Resolución:

Por teorema tenemos: $7 \leq 2x + 3 < 8 \longleftrightarrow 4 \leq 2x < 5$

$$2 \leq x < \frac{5}{2}$$

De aquí conseguimos: $x \in \left[2 \,;\, \dfrac{5}{2}\right\rangle$ $\qquad \therefore \quad \text{C.S.} = \left[2 \,;\, \dfrac{5}{2}\right\rangle$

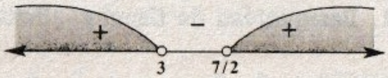
Ejercicio 49

Resolver: $\left[\!\left[\dfrac{1}{x-3} \right]\!\right] \le 1$

Resolución:

Por teorema tenemos: $\dfrac{1}{x-3} < 2 \quad \longleftrightarrow \quad \dfrac{1}{x-3} - 2 < 0$

$$\frac{-2x+7}{x-3} < 0$$



Multiplicamos por (-1): $\dfrac{2x-7}{x-3} > 0$

$$\therefore \quad \text{C.S.} = \langle -\infty\, ; 3\rangle \cup \left\langle \frac{7}{2}\, ;\, \infty \right\rangle$$

Ejercicio 50

Resolver: $|\, 4 - [\![x^2 - x]\!]\, | = 0$

Resolución:

Por teorema de V.A: $4 - [\![x^2 - x]\!] = 0 \quad \longleftrightarrow \quad [\![x^2 - x]\!] = 4$

De donde se plantea: $4 \le x^2 - x < 5$

Sumando 1/4 tenemos: $\dfrac{17}{4} \le x^2 - x + \dfrac{1}{4} < \dfrac{21}{4} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{17}{4} \le \left(x - \dfrac{1}{2} \right)^2 < \dfrac{21}{4}$

Extrayendo raíz cuadrada: $\dfrac{\sqrt{17}}{2} \le \left| x - \dfrac{1}{2} \right| < \dfrac{\sqrt{21}}{2}$ .....$(*)$

Recuerda que $\forall\, a, c \in \mathbb{R}^+$:

$$a < |b| < c \quad \longleftrightarrow \quad -c < b < -a \;\vee\; a < b < c$$

Ahora en $(*)$ tenemos: $-\dfrac{\sqrt{21}}{2} < x - \dfrac{1}{2} \le -\dfrac{\sqrt{17}}{2} \quad \vee \quad \dfrac{\sqrt{17}}{2} \le x - \dfrac{1}{2} < \dfrac{\sqrt{21}}{2}$

$$\frac{1-\sqrt{21}}{2} < x \le \frac{1-\sqrt{17}}{2} \quad \vee \quad \frac{\sqrt{17}+1}{2} \le x < \frac{\sqrt{21}+1}{2}$$

$$x \in \left\langle \frac{1-\sqrt{21}}{2} ; \frac{1-\sqrt{17}}{2} \right] \cup \left[\frac{\sqrt{17}+1}{2} ; \frac{\sqrt{21}+1}{2} \right\rangle$$

$$\therefore \quad C.S. = \left\langle \frac{1-\sqrt{21}}{2} ; \frac{1-\sqrt{17}}{2} \right] \cup \left[\frac{\sqrt{17}+1}{2} ; \frac{\sqrt{21}+1}{2} \right\rangle$$

8. REGLAS ADICIONALES

8.1. Desigualdad de Cauchy - Schwarz

Siendo $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, b_1, b_2, ...$, bn números reales se cumple:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... b_n^2)$$

Demostración:

Sea el polinomio cuadrático

$$P(x) \equiv (a_1 x - b_1)^2 + (a_2 x - b_2)^2 + ... + (a_n x - b_n)^2 \; ; \; x \in \mathbb{R}$$

Nótese que $P(x) \geq 0 \; ; \forall \in \mathbb{R}$. Ahora en el polinomio:

$$P(x) \equiv (a_1^2 x^2 - 2a_1 b_1 x + b_1^2) + (a_2^2 x^2 - 2a_2 b_2 x + b_2^2) + ... + (a_n^2 x^2 - 2a_n b_n x + b_n^2) \geq 0$$

$$P(x) \equiv (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)x^2 - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \geq 0$$

Supongamos que:

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = A \; ; \; a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n = B;$$

$$b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2 = C \; ;$$

Con lo cual el polinomio se puede reescribir así:

$$P(x) \equiv Ax^2 - 2Bx + C \geq 0 \; ; \forall x \in \mathbb{R}$$

Por la propiedad del trinomio positivo:

$$(-2B)^2 - 4(A)(C) \leq 0$$

$$4B^2 \leq 4AC$$

$$B^2 \leq AC$$

$\therefore \quad (a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$ ***Lqqd***

8.2. Lema de Titu

Siendo $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ números reales y $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$ reales positivos se cumple:

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+.........+\frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1+a_2+......+a_n)^2}{b_1+b_2+......+b_n}$$

Demostración

Dando uso de la desigualdad de Cauchy - Schwarz se plantea la relación:

$$\left(\sqrt{\frac{a_1^2}{b_1}}.\sqrt{b_1}+\sqrt{\frac{a_2^2}{b_2}}.\sqrt{b_2}+.....+\sqrt{\frac{a_n^2}{b_n}}.\sqrt{b_n}\right)^2 \leq \left(\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+.....+\frac{a_n^2}{b_n}\right)\cdot(b_1+b_2+.....+b_n)$$

Al simplificar en el primer miembro:

$$(a_1+a_2+......+a_n)^2 \leq \left(\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+.......+\frac{a_n^2}{b_n}\right)\cdot(b_1+b_2+.....+b_n)$$

Reescribiendo convenientemente:

$$\left(\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+......+\frac{a_n^2}{b_n}\right)(b_1+b_2+.....+b_n) \geq (a_1+a_2+......+a_n)^2$$

Multiplicamos cada miembro por $\dfrac{1}{b_1+b_2+.....+b_n}$

$$\frac{\left(\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+.....+\frac{a_n^2}{b_n}\right)(b_1+b_2+....+a_n)}{b_1+b_2+......+b_n} \geq \frac{(a_1+a_2+.....+a_n)^2}{b_1+b_2+....+b_n}$$

$$\therefore \quad \frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+.....+\frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1+a_2+.......+a_n)^2}{b_1+b_2+......+b_n}$$ ***Lqqd***

8.3. Media Potencial

Siendo $a_1, a_2, a_3, ..., a_k$ números reales positivos y m, n racionales no nulas tal que $m < n$, se cumple:

$$\sqrt[m]{\frac{a_1^m + a_2^m + ... + a_k^m}{k}} \le \sqrt[n]{\frac{a_1^n + a_2^n + a_k^n}{k}}$$

8.4. Desigualdad de Chebyshev

Siendo: $a_1 \le a_2 \le a_3 \le .... \le a_n$ y $b_1 \le b_2 \le b_3 \le .... \le b_n$ se cumple:

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n}{n} \ge \left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1 + b_2 + ... + b_n}{n}\right)$$

Observación

Si una de las sucesiones es crecuiente y la otra decreciente, el sentido del signo de relación cambia:

Por ejemplo si $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge .... \ge a_n$ y $b_1 \le b_2 \le b_3 \le .... \le b_n$

tenemos:

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n}{n} \le \left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1 + b_2 + ... + b_n}{n}\right)$$

Ejercicio 51

Si $a,b \in \mathbb{R}^+$ Determine el máxino de "n" que verifique la relación:

$$(a^4 + b^4)(a^2 + b^2) \ge n(a^3 + b^3)^2$$

Resolución

Según la desigualdad de Cauchy - Schwarz se plantea.

$$[(a^2)^2 + (b^2)^2](a^2 + b^2) \ge (a^2 \cdot a + b^2 \cdot b)^2$$

$$(a^4 + b^4)(a^2 + b^2) \ge (a^3 + b^3)^2$$

De donde conseguimos:

$$\frac{\left(a^4+b^4\right)\left(a^2+b^2\right)}{\left(a^3+b^3\right)^2} \geq 1 \qquad \text{..................} (1)$$

La relación dada es:

$$\frac{\left(a^4+b^4\right)\left(a^2+b^2\right)}{\left(a^3+b^3\right)^2} \geq n \qquad \text{..................} (2)$$

De (1) y (2) tenemos: $\quad n \leq 1$

$\therefore$ n (máximo) = 1

Ejercicio 52

Si x, y, z $\in \mathbb{R}^+$ tal que $x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Determine el mínimo valor de $x^3 + y^3 + z^3$

Resolución:

Según la media potencial se plantea:

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \leq \sqrt[3]{\frac{x^3+y^3+z^3}{3}}$$

Reescribiendo en forma conveniente y dando uso de la condición tenemos:

$$\sqrt[3]{\frac{x^3+y^3+z^3}{3}} \geq \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{x^3+y^3+z^3}{3}} \geq \sqrt{\frac{8}{3}}$$

Elevando al cubo

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq \frac{8}{3}\sqrt{\frac{8}{3}}$$

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 8\sqrt{\frac{8}{3}}$$

$$\therefore \; (x^3 + y^3 + z^3)\text{mín} = 8\sqrt{\frac{8}{3}}$$

Ejercicio 51

Si a, b, c $\in \mathbb{R}^+$. Determine el mayor valor de "k" en:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq k$$

Resolúción:

Primera forma

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq k$$

Sumando 3 a cada miembro convenientemente:

$$\frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{a+c} + 1 + \frac{c}{a+b} + 1 \geq k + 3$$

$$\frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{a+c} + \frac{a+b+c}{a+b} \geq k + 3$$

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}\right) \geq k + 3$$

Multiplicando por 2 tenemos:

$$(2a+2b+2c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}\right) \geq 2k + 6$$

$$[(a+b)+(a+c)+(b+c)]\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)\geq 2k+6 \quad \text{.................. (1)}$$

Se sabe que MA ≥ MH:

$$\frac{(a+b)+(a+c)+(b+c)}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}}$$

$$[(a+b)+(a+c)+(b+c)]\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)\geq 9 \quad \text{.................. (2)}$$

De (1) y (2) tenemos:

$$2k+6\leq 9$$

$$2k\leq 3$$

$$k\leq\frac{3}{2}$$

$$\therefore \quad k(\text{máximo})=\frac{3}{2}$$

Segunda forma:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq k$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{ab+bc}+\frac{c^2}{ac+bc}$$

Según el lema de Titu:

$$\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{ab+bc}+\frac{c^2}{ac+bc}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+ac+bc)}$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+ac+bc)} \quad \text{.....................} (1)$$

Se sabe que:

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$$

Sumando $2(ab + ac + bc)$

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)\geq 3(ab+ac+bc)$$

$$(a+b+c)^2\geq 3(ab+ac+bc)$$

Al dividir entre $(ab + ac + bc)$:

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+ac+bc}\geq 3$$

Ahora multiplicamos por $\frac{1}{2}$

$$\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+ac+bc)}\geq\frac{3}{2} \quad \text{.....................} (2)$$

De (1) y (2), según transitividad:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+ac+bc)}\geq\frac{3}{2}$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

Esta relación es conocida como la Desigualdad de Nesbit

$$\therefore \; k=\frac{3}{2}$$

Ejercicio 54

Si a, b, c, x, y, z son número reales positivas tal que $a \geq b \geq c \wedge z \geq y \geq x$. Demostrar que:

$$\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z} \geq \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}$$

Resolución:

Se sabe que $a \geq b \geq c \wedge z \geq y \geq x$, luego:

$$\frac{a^2}{x} \geq \frac{b^2}{y} \geq \frac{c^2}{z}$$

Ahora según Chebyshev:

$$\frac{\frac{a^2}{x}\cdot a+\frac{b^2}{y}\cdot b+\frac{c^2}{z}\cdot c}{3} \geq \left(\frac{\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}}{3}\right)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

$$\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z} \geq \left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\right)\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \qquad \text{.................. (1)}$$

Según el lema de Titu:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

Multiplicando por $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$:

$$\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\right)\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \geq \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)} \qquad \text{.................. (2)}$$

Finalmente con (1) y (2) según transitividad queda demostrada la relación:

$$\therefore \quad \frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z} \geq \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)} \quad \textit{Lqqd}$$

Ejercicio 55

Dada la inecuación: $\frac{x+a}{x-a} > \frac{x+b}{x-b}$

Con: $-a > -b > 0$, entonces uno de los intervalos solución es:

A) $\langle 0; \infty\rangle$ B) $\langle a ; b\rangle$ C) $\langle a ; 0\rangle$ D) $\langle -\infty ; b\rangle$ E) $\langle b ; 0\rangle$

Resolución:

La inecuación dada es : $\frac{x+a}{x-a} - \frac{x+b}{x-b} > 0$

Efectuando operaciones: $\frac{(x+a)(x-b)-(x-a)(x+b)}{(x-a)(x-b)} > 0$

$$\frac{(a-b)x-(b-a)x}{(x-a)(x-b)} > 0$$

$$\frac{2(a-b)x}{(x-a)(x-b)} > 0 \qquad ...(1)$$

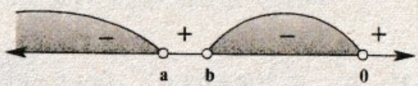
Por condición tenemos: $-a > -b > 0$

Multiplicamos por (- 1): $a < b < 0$

De donde es evidente que: $a - b < 0$ ...(2)

Ahora según (2), en (1) tenemos: $\frac{x}{(x-a)(x-b)} < 0$

Finalmente en la recta real:



$\therefore$ C.S. $= \langle -\infty ; a\rangle \cup \langle b ; 0 \rangle$

Clave: E

Ejercicio 56

Si $m \geq -x^2 + 3x + 12$ ¿ Cuál es el menor valor real que puede asumir "m"?

A) 2 B) 14 C) 12 D) 14,25 E) 12,25

Resolución:

La desigualdad dada es: $x^2 - 3x + (m-12) \geq 0 \ ; \ \forall x \in \mathbb{R}$

Recuerda que:

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \ ; \forall x \in \mathbb{R} \longleftrightarrow a > 0 \quad \wedge \quad b^2 - 4ac \leq 0$$

Ahora podemos plantear: $(-3)^2 - 4(m-12) \leq 0$

$$9 - 4m + 48 \leq 0 \quad \longleftrightarrow \quad -4m \leq -57$$

De donde logramos obtener: $m \geq \dfrac{57}{4} \quad \longleftrightarrow \quad m \geq 14{,}25$

$$\therefore \quad m_{min} = 14{,}25$$

Clave: D

Ejercicio 57

Si a, b, c son tres números positivos sobre el valor de : $E = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a}$ lo verdadero es:

A) Siempre es superior a 4

B) Puede ser inferior a 3

C) Nunca es inferior a 3

D) $0 < E < 2$

E) $0 < E < 1$

Resolución:

Teniendo en cuenta la propiedad para números positivos: MA ≥ MG se plantea lo siguiente:

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{1}$$

Finalmente tenemos: $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} \geq 3$

Clave: C

Ejercicio 58

Indicar con verdadero (V) o falso (F) y en el mismo orden las siguiente proposiciones:

I. Si $x < 0$, entonces: $\sqrt{x^2} = -x$

II. Si $a < b < 0$, entonces: $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$

III. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$; si $|x| < |y|$, entonces: $x < y$

A) VVF B) VFF C) FVF D) FFV E) VVV

Resolución:

I. Se sabe que : $\sqrt{x^2} = |x|;\ \forall x \in \mathbb{R}$

Ahora si $x < 0$: $\sqrt{x^2} = -x$

La proposición es verdadera (V)

II. Por condición: $a < b < 0$; observa que **a** y **b** son negativos, luego es evidente que $ab > 0$

En la condición: $a < b < 0 \quad \longleftrightarrow \quad \dfrac{a}{ab} < \dfrac{b}{ab} < \dfrac{0}{ab}$

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$$

De donde obtenemos: $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$

La proposición es verdadera (V)

III. Por condición: $|x| < |y|;\ \forall x, y \in \mathbb{R}$

Al cuadrado: $|x|^2 < |y|^2 \quad \longleftrightarrow \quad x^2 < y^2$

$x^2 - y^2 < 0 \quad \longleftrightarrow \quad (x+y)(x-y) < 0$

De donde obtenemos: $-y < x < y$

Es evidente que la proposición es falsa (F)

Clave: A

Ejercicio 51

Determinar el conjunto solución de la desigualdad: $\dfrac{3}{1-x} \leq 2$

A) $\left\{x \in \mathbb{R} / x \leq -\dfrac{1}{2}\right\} \cap \{x \in \mathbb{R} / x > 1\}$

B) $\{x \in \mathbb{R} / x < 1\} \cap \left\{x \in \mathbb{R} / x \geq -\dfrac{1}{2}\right\}$

C) $\left\{x \in \mathbb{R} / x \leq \dfrac{1}{2}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} / x > \dfrac{1}{2}\right\}$

D) $\left\{x \in \mathbb{R} / x \leq -\dfrac{1}{2}\right\} \cup \{x \in \mathbb{R} / x > 1\}$

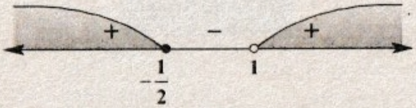
E) $\left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x < -\dfrac{1}{2}\right\} \cup \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 1\}$

Resolución:

La desigualdad es: $\dfrac{3}{1-x} - 2 \leq 0 \quad \longleftrightarrow \quad \dfrac{3-2+2x}{1-x} \leq 0$

$$\frac{2x+1}{1-x} \leq 0 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{2x+1}{x-1} \geq 0$$

En la recta real tenemos:



$$\therefore \quad x \in \text{C.S.} = \left\langle -\infty \,;\, -\frac{1}{2} \right] \cup \langle 1 \,;\, \infty \rangle$$

Clave D

Ejercicio 60

Hallar el conjunto solución de la siguiente desigualdad: $\sqrt{x+2} > x$

A) $\langle -1 \,;\, 2\rangle$ B) $[0 \,;\, 2\rangle$ C) $[-2 \,;\, \infty\rangle$ D) $[-2 \,;\, 2\rangle$ E) $[-1 \,;\, 1]$

Resolución:

De acuerdo con la teoría de inecuación con radicales, tenemos:

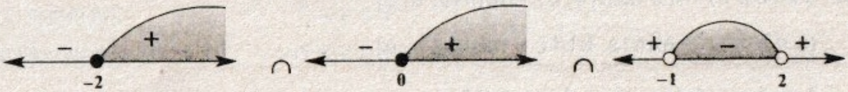
S_1: $x+2 \geq 0 \;\wedge\; x \geq 0 \;\wedge\; x+2 > x^2$

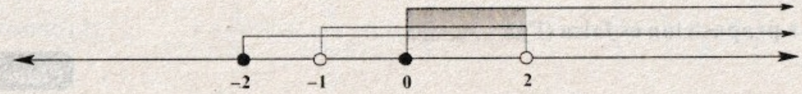
$x+2 \geq 0 \;\wedge\; x \geq 0 \;\wedge\; -x^2+x+2 > 0$

$x+2 \geq 0 \;\wedge\; x \geq 0 \;\wedge\; x^2-x-2 < 0$

$x+2 \geq 0 \;\wedge\; x \geq 0 \;\wedge\; (x-2)(x+1) < 0$

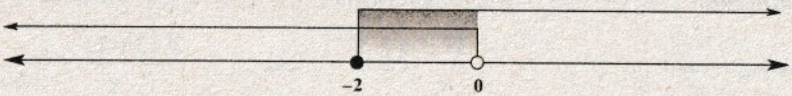
En la recta real:



De la intersección:

Se observa que: $S_1 = [0\,;2\rangle$

S_2: $x + 2 \geq 0 \quad \wedge \quad x < 0$

En la recta real:



Podemos observar que: $S_2 = [-2\,;0\rangle$

Finalmente tenemos: $S_{tot} = S_1 \cup S_2$

$\therefore \; S_{tot} = [-2\,;2\,\rangle$

Clave: D

Ejercicio 61

Definamos la operación # en $\mathbb{R}$: $a \# b = \begin{cases} a; & a \leq b \\ b; & b < a \end{cases}$

¿Cuáles de las siguientes proposiciones son falsas?

I. La operación es conmutativa.

II. La operación es asociativa.

III. Si $(2x) \# 4 = 2$, entonces: $x = 2$

A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III D) I y II E) II y III

Resolución:

Observa que la regla de correspondencia equivale a: $a \# b = \text{mín}\{a, b\}$

I. $a \# b = \text{mín}\{a, b\}$, $b \# a = \text{mín}\{b, a\}$ ⇨ como : mín $\{a, b\} = \text{mín}\{b. a\}$ $\therefore \quad a \# b = b \# a$

La proposición es verdadera (V)

II. $a \# (b \# c) = a \# \text{mín}\{b, c\} = \text{mín}\{a, b, c\}$

$(a \# b) \# \; c = \text{mín}\{a, b\} \# c = \text{mín}\{a, b, c\}$

La proposición es verdadera (V)

III. $(2x\,) \# 4 = \text{mín}\{2x, 4\}$; como $(2x) \# 4 = 2$, resulta evidente que $2x = 2 \rightarrow x = 1$

La proposición es falsa (F)

Clave: C

Ejercicio 62

Si $K=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,\sqrt{x}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right\}$ entonces:

A) $K\subset[-2\,;\,2]$ B) $K\subset\left[\dfrac{1}{2}\,;\,3\right]$ C) $K\cap\{1;3\}\neq\phi$

D) $[-1\,;\,1]\subset K$ E) $K=\phi$

Resolución:

La inecuación dada es: $\sqrt{x}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Por existencia en $\mathbb{R}$: $x>0\ \wedge\ \sqrt{x}^2<1 \ \rightarrow\ x>0\ \wedge\ x<1$

De donde obtenemos: $0<x<1$

Con lo cual conseguimos: $K=\langle 0\,;\,1\rangle$ **Clave: A**

Ejercicio 63

Si $F=\left\{k\,/\,\left|\dfrac{x-12}{x-8}\right|\leq k\ ;\ \forall x\in[2\,;\,5]\right\}$, entonces F es igual a:

A) $\left[\dfrac{7}{3}\,;\,\infty\right\rangle$ B) $[3\,;\,\infty\rangle$ C) $[1\,;\,\infty\rangle$ D) $[0\,;\,\infty\rangle$ E) $[4\,;\,\infty\rangle$

Resolución:

Observa que: $\dfrac{x-12}{x-8}=1-\dfrac{4}{x-8}$

Por condición: $2\leq x\leq 5$

Transformando: $-6\leq x-8\leq -3$

$$-\frac{1}{3}\leq\frac{1}{x-8}\leq-\frac{1}{6}\ \longleftrightarrow\ \frac{4}{6}\leq-\frac{4}{x-8}\leq\frac{4}{3}$$

Sumando (1): $1+\dfrac{2}{3}\leq 1-\dfrac{4}{x-8}\leq 1+\dfrac{4}{3}\ \longleftrightarrow\ \dfrac{5}{3}\leq\dfrac{x-12}{x-8}\leq\dfrac{7}{3}$

Como $\frac{-7}{3} \leq \frac{5}{3}$: $\qquad \frac{-7}{3} \leq \frac{x-12}{x-8} \leq \frac{7}{3}$

En consecuencia: $\qquad \left|\frac{x-12}{x-8}\right| \leq \frac{7}{3}$ ...(1)

En el conjunto: $\qquad \left|\frac{x-12}{x-8}\right| \leq k$ ...(2)

De (1) y (2) podemos notar que 7/3 es el valor mínimo de k, con lo cual podemos afirmar que: $k \geq \frac{7}{3}$

$$\therefore \quad F = \left[\frac{7}{3}\ ;\ \infty\right\rangle$$

Clave: A

Ejercicio 64

Sean: a, b, x, y; números reales positivos distintos entre sí tales que: $a^2 + b^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 1$, entonces:

A) $ax + by \geq 1$ B) $ax + by = 1$ C) $(ax + by) \in \left\langle \frac{1}{2}\ ;\ \frac{4}{5} \right\rangle$

D) $(ax + by) \in \langle 0\ ;\ 1 \rangle$ E) $(ax + by) \in \langle 1\ ;\ 2 \rangle$

Resolución:

Como : a, b, c, y, $\in \mathbb{R}^+$, es evidente que: $\quad ax + by > 0$ ....(1)

Ahora se plantea: $\quad (a - x)^2 > 0 \longleftrightarrow a^2 + x^2 > 2ax$

$\quad (b - y)^2 > 0 \longleftrightarrow b^2 + y^2 > 2by$

Sumando tenemos : $\quad a^2 + b^2 + x^2 + y^2 > 2ax + 2by$

Con los datos tenemos: $\quad 2 > 2(ax + by)$

Multiplicando por (1/2): $\quad 1 > ax + by$

De donde obtenemos: $\quad ax + by < 1$ ....(2)

Finalmente de (1) y (2): $0 < ax + by < 1$

Clave D

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1

En $\mathbb{Z}^+$ se define: $x * y = \dfrac{x^2 - y^2}{x + y}$ ¿Cuál de las alternativas es mayor según la operación $*$?

A) $15 * 12$ B) $7 * 3$ C) $9 * 3$

D) $12 * 7$ E) $8 * 6$

Resolución:

En la condición tenemos:

$$x * y = \frac{(x+y)(x-y)}{x+y}$$

$$x * y = x - y$$

Ahora en cada alternativa:

$$15 * 12 = 15 - 12 = 3$$
$$7 * 3 = 7 - 3 = 4$$
$$9 * 3 = 9 - 3 = 6$$
$$12 * 7 = 12 - 7 = 5$$
$$8 * 6 = 8 - 6 = 2$$

Clave: C

PROBLEMA 2

A partir de la tabla:

$*$	1	2	3
1	2	x	10
2	5	8	y
3	z	13	18

Calcular: $x + y + z$

A) 12 B) 15 C) 28

D) 36 E) 43

Resolución:

De la tabla podemos observar que:

$$1 * 1 = 2 = 1^2 + 1^2$$
$$2 * 2 = 8 = 2^2 + 2^2$$
$$3 * 3 = 18 = 3^2 + 3^2$$

Ahora podemos plantear lo siguiente:

$$1 * 2 = x$$
$$1^2 + 2^2 = x \quad \longleftrightarrow \quad 5 = x$$
$$2 * 3 = y$$
$$2^2 + 3^2 = y \quad \longleftrightarrow \quad 13 = y$$
$$3 * 1 = z$$
$$3^2 + 1^2 = z \quad \longleftrightarrow \quad 10 = z$$

Finalmente podemos notar que:

$$x + y + z = 5 + 13 + 10$$

$$\therefore \quad \mathbf{x + y + z = 28}$$

Clave: C

PROBLEMA 3

En la tabla adjunta se define la operación $*$ en el conjunto $\{1; 2; 3; 4\}$

$*$	1	2	3	4
1	3	4	1	2
2	4	1	2	3
3	1	2	3	4
4	2	3	4	1

Calcular: $K = (x * y) * y$

Sabiendo que: $(x * 3) * 4 = 4 * 2$

$(y * 2) * 2 = 2 * 3$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 3 ó 4

Resolución:

Por condición: $(x * 3) * 4 = 4 * 2$

$(x * 3) * 4 = 3$

De la tabla tenemos: $2 * 4 = 3$

Con lo cual se cumple: $x * 3 = 2$

De donde fácilmente notamos que: $x = 2$

Por condición: $(y * 2) * 2 = 2 * 3$

$(y * 2) * 2 = 2$

De la tabla tenemos: $3 * 2 = 2$

Con lo cual se cumple: $y * 2 = 3$

De donde fácilmente notamos que: $y = 4$

Finalmente hallemos:

$$K = (2 * 4) * 4$$

$$K = 3 * 4$$

$$\therefore \quad \mathbf{K = 4}$$

Clave: D

PROBLEMA 4

Si $\dfrac{x}{6} - \dfrac{x - \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}} - \left(\dfrac{2}{15} - \dfrac{x}{9}\right)$ representa al neutro de la adición en $\mathbb{R}$. Determine el valor "x".

A) 3/5 B) 1 C) 2/5

D) 5/3 E) 1/4

Resolución:

Por condición tenemos:

$$\frac{x}{6} - \frac{x - \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}} - \left(\frac{2}{15} - \frac{x}{9}\right) = 0$$

$$\frac{x}{6} - \frac{2x - 1}{6} - \frac{2}{15} + \frac{x}{9} = 0$$

Dando mcm al denominador:

$$\frac{15x - 30x + 15 - 12 + 10x}{90} = 0$$

$$\frac{-5x + 3}{90} = 0$$

De donde obtenemos:

$$-5x + 3 = 0$$

$$3 = 5x$$

$$\therefore \quad \mathbf{3/5 = x}$$

Clave: A

PROBLEMA 5

En Q definimos la operación $*$ por:

$$x * y = x - y + 2$$

si x^{-1} es el inverso de x bajo la operación $*$. Determine x en:

$$x * 2^{-1} = 5^{-1} * x$$

A) 2/3 B) 9/4 C) 7/2

D) 5/7 E) 9/2

Resolución:

Hallemos el neutro de la operación $*$ para lo cual planteamos:

$x * x^{-1} = x^{-1} * x = e = \text{neutro}$ ... (1)

El elemento neutro "e" verifica:

$$x * e = x$$

Aplicando la condición del problema:

$$x - e + 2 = x$$

$$2 = e \qquad ...(2)$$

De (1) y (2) tenemos: $x * x^{-1} = 2$

Para $x = 2$ obtenemos: $2 * 2^{-1} = 2$

$$2 - 2^{-1} + 2 = 2 \longleftrightarrow 4 - 2^{-1} = 2$$

$$2 = 2^{-1}$$

Para $x = 5$ obtenemos: $5 * 5^{-1} = 2$

$$5 - 5^{-1} + 2 = 2 \longleftrightarrow 7 - 5^{-1} = 2$$

$$5 = 5^{-1}$$

Finalmente tenemos:

$$x * 2^{-1} = 5^{-1} * x$$

$$x * 2 = 5 * x$$

$$x - 2 + 2 = 5 - x + 2$$

$$x = 7 - x$$

$$2x = 7$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 7/2}$$

Clave: C

PROBLEMA 6

Se define en $\mathbb{R}$ la operación #, tal que:

$$a \# b = a(1 - 2b) + b$$

¿Cuál de las siguientes alternativas es falsa?

A) # es conmutativa

B) # es asociativa

C) El elemento neutro es 4

D) Tiene inverso $\forall$ a $\in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

E) $3 \# -1 = 8$

Resolución:

Siendo "e" el neutro: $a \# e = a$

Por condición tenemos:

$$a(1 - 2e) + e = a$$

$$a - 2ae + e = a \longleftrightarrow -2ae + e = a - a$$

$$-2ae + e = 0 \longleftrightarrow e - 2ae = 0$$

$$e(1 - 2a) = 0 \longleftrightarrow e = 0 \vee 1 - 2a = 0$$

De donde obtenemos:

$$\mathbf{e = 0, \forall a \neq \frac{1}{2}}$$

Clave: C

Observación:

Se deja para el lector la verificación de las otras alternativas

PROBLEMA 7

Definimos la operación $*$ en el conjunto $A = \{0; 2; 4; 6; 8\}$ con la siguiente regla de correspondencia:

*	0	2	4	6	8
0	4	6	8	0	2
2	6	8	0	2	4
4	8	0	2	4	6
6	0	2	4	6	8
8	2	4	6	8	0

Calcular x en:

$$[(x^{-1} * 2^{-1}) * (6 * 8)^{-1}]^{-1} = 2$$

A) 9 B) 7 C) 5

D) 4 E) 3

Resolución:

Una rápida inspección en la tabla permite reconocer al elemento neutro; e = 6, luego: $2 * 2^{-1} = 6$

La última igualdad según la tabla ocurre cuando: $2^{-1} = 0$

También podemos reconocer que:

$$6 * 8 = 8$$

Asimismo se debe cumplir lo siguiente:

$$8 * 8^{-1} = 6$$

La última igualdad según la tabla ocurre cuando: $8^{-1} = 4$

Ahora en la igualdad que contiene a x:

$$[(x^{-1} * 2^{-1}) * (6 * 8)^{-1}]^{-1} = 2$$

$$[(x^{-1} * 0) * 8^{-1}]^{-1} = 2$$

$$[(x^{-1} * 0) * 4]^{-1} = 2$$

Tomando inverso a ambos miembros:

$$(x^{-1} * 0) * 4 = 2^{-1}$$

$$(x^{-1} * 0) * 4 = 0$$

De acuerdo con la tabla podemos plantear:

$$x^{-1} * 0 = 2$$

$$x^{-1} = 8$$

$$x = 8^{-1}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 4}$$

Clave: D

PROBLEMA 8

Si se sabe que: $a * b = \dfrac{a+b+1}{2}$, definido en $\mathbb{R}$. Determine el inverso de 3.

A) 1 B) –1 C) 0
D) –2 E) 2

Resolución:

Una rápida inspección permite observar que $*$ es conmutativa y tiene elemento neutro; si "e" es el neutro, se cumple:

$$a*e = a \quad ; \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$$

Por condición tenemos:

$$\frac{a+e+1}{2} = a$$

$$a + e + 1 = 2a$$

$$e = a - 1$$

Hallemos el inverso de a:

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = a - 1$$

Haciendo que a = 3:

$$3 * 3^{-1} = 3 - 1$$

$$\frac{3+3^{-1}+1}{2} = 2$$

$$4 + 3^{-1} = 4$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{3^{-1} = 0}$$

Clave: C

PROBLEMA 9

Demostrar que $\forall\, a \in \mathbb{R}$ se cumple:

$$-a = (-1) \cdot a$$

Resolución:

Observa que si se prueba: $a + (-1) \cdot a = 0$; $(-1)a$ sería el opuesto de a, por tanto:

$$(-1) \cdot a = -a$$

Partiremos de: $a + (-1) \cdot a$

Neutro multiplicativo: $1 \cdot a + (-1) \cdot a$

Por la distributiva: $[1 + (-1)] \cdot a$

Neutro aditivo: $0 \cdot a$

Por teorema resulta: 0

Con lo cual queda probado que:

$$a + (-1) \cdot a = 0$$

Ahora podemos establecer que:

$$(-1) \cdot a = -a$$

Finalmente por el axioma de la simetría:

$$-a = (-1) \cdot a \qquad \textit{Lqqd}$$

PROBLEMA 10

Demostrar que:

$$(a \cdot b = 0) \longleftrightarrow (a = 0 \vee b = 0)$$

Resolución:

La demostración consta de dos partes, esto se debe al conectivo de doble implicancia ($\longleftrightarrow$).

Primera parte ($\rightarrow$)

Por hipótesis $a.b = 0$

Supongamos que $b \neq 0$, luego existe b^{-1} y podemos plantear lo siguiente.

$$(a \cdot b) \cdot b^{-1} = 0 \cdot b^{-1}$$

$$a \cdot (b \cdot b^{-1}) = 0$$

$$a \cdot (1) = 0 \quad \rightarrow \quad a = 0$$

Supongamos que $a \neq 0$, luego existe a^{-1} y podemos plantear lo siguiente:

$$a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0$$

$$(a^{-1} \cdot a) \cdot b = 0$$

$$(1) \cdot b = 0 \quad \rightarrow \quad b = 0$$

Segunda parte ($\leftarrow$)

Por hipótesis: $a = 0 \vee b = 0$

Siendo $a = 0$

Multiplicando por b: $a \cdot b = 0 \cdot b$

$$ab = 0$$

Siendo $b = 0$

Multiplicando por a: $a \cdot b = a \cdot 0$

$$ab = 0$$

$\therefore$ $\mathbf{(ab = 0) \longleftrightarrow (a = 0 \vee b = 0)}$

Lqqd

PROBLEMA 11

Determine el ínfimo y el supremo del siguiente conjunto:

$$A = \left\{ \frac{30}{2x+5} \Big/ -2 \leq x \leq 5 \right\}$$

Resolución:

Por condición tenemos: $-2 \leq x \leq 5$

Multiplicando por (2): $-4 \leq 2x \leq 10$

Sumando (5) obtenemos:

$$1 \leq 2x + 5 \leq 15$$

Tomando el recíproco:

$$\frac{1}{15} \leq \frac{1}{2x+5} \leq 1$$

Multiplicando por 30:

$$2 \leq \frac{30}{2x+5} \leq 30$$

mayor cota inferior (2) — menor cota superior (30)

$\therefore$ **Ínfimo = 2 y Supremo = 30**

PROBLEMA 12

Dado el conjunto :

$$A = \left\{ x \ / \ \frac{1}{4} < \frac{2x-1}{x+3} < \frac{3}{5} \right\}$$

Calcular: Inf(A) + Sup(A)

A) 1/2 B) 2 C) 3/2

D) 3 E) 4

Resolución:

Por condición tenemos:

$$\frac{1}{4} < \frac{2x-1}{x+3} < \frac{3}{5}$$

Sumando (–2) conseguimos:

$$\frac{1}{4}-2<\frac{2x-1}{x+3}-2<\frac{3}{5}-2$$

$$-\frac{7}{4}<-\frac{7}{x+3}<-\frac{7}{5}$$

Multiplicando por $\left(-\frac{1}{7}\right)$:

$$\frac{1}{5}<\frac{1}{x+3}<\frac{1}{4}$$

Tomando el recíproco: $4<x+3<5$

Sumando (–3) obtenemos: $1<x<2$

Finalmente podemos notar:

$$\text{Inf(A)} = 1 \text{ y } \text{Sup(A)} = 2$$

$\therefore$ **Inf(A) + Sup(A) = 3**

Clave: D

PROBLEMA 13

Determine el ínfimo del conjunto:

$$A=\left\{x+x^2+\frac{1}{x^3}\,/\,x>0\right\}$$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 0

Resolución:

Por propiedad para números positivos podemos establecer lo siguiente:

$$MA \geq MG$$

$$\frac{x+x^2+\frac{1}{x^3}}{3} \geq \sqrt[3]{x\cdot x^2\cdot\frac{1}{x^3}}$$

Multiplicando por (3):

$$x+x^2+\frac{1}{x^3} \geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{x^3}{x^3}}$$

$$x+x^2+\frac{1}{x^3} \geq 3(1)$$

Finalmente tenemos:

$$x+x^2+\frac{1}{x^3} \geq 3$$

$\therefore$ **Inf(A) = 3**

Clave: C

PROBLEMA 14

Resolver: $(x+1)^2 \leq 4(x+1)$

A) $\langle -3\,;0]$ B) $[-1\,;3]$ C) $[-3\,;-1]$

D) $\langle -\infty\,;-3]$ E) $[1\,;3]$

Resolución:

La inecuación dada es:

$$(x+1)^2-4(x+1)\leq 0$$

Transformando tenemos:

$$(x+1).(x-3)\leq 0$$

Finalmente en la recta real tenemos:

$\therefore$ **C.S. = [–1 ; 3]**

Clave: B

PROBLEMA 15

Luego de resolver: $P^2(x)-5P(x)+6\leq 0$, indicar el número de valores enteros que asume "x" cuando $P(x)\equiv x^2-1$.

A) 3 B) 2 C) 1

D) 4 E) 5

Resolución:

La inecuación dada es:

$$P^2(x) - 5P(x) + 6 \leq 0$$

Dando uso del aspa simple:

$$[P(x) - 2][P(x) - 3] \leq 0$$

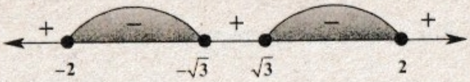
Reemplazando a $P(x)$:

$$(x^2 - 3)(x^2 - 4) \leq 0$$

Transformando tenemos:

$$(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + 2)(x - 2) \leq 0$$

Ahora en la recta real:



Observa que los valores enteros que asume "x" son −2 y 2

$\therefore$ **Nº de valores = 2**

Clave: B

PROBLEMA 16

¿Para qué valores de "k" la inecuación:

$$x^2 + kx - 2 < 2x^2 - 2x + 2$$

se verifica para todo valor real de x ?

A) $k \in \langle -6 ; 2\rangle$ B) $k \in \langle -10 ; 7\rangle$

C) $k \in \langle 1 ; 3\rangle$ D) $k \in \langle -15 ; -10\rangle$

E) $k \in \langle 3 ; 6\rangle$

Resolución:

La inecuación dada es :

$$x^2 + kx - 2 < 2x^2 - 2x + 2$$

$$-x^2 + (k + 2)x - 4 < 0$$

Multiplicando por (−1):

$$x^2 - (k + 2)x + 4 > 0 \ ; \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Por propiedad tenemos:

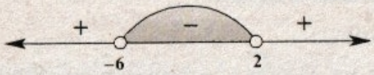
$$[-(k + 2)]^2 - 4(1)(4) < 0$$

$$(k + 2)^2 - (4)^2 < 0$$

Por diferencia de cuadrados:

$$(k + 6)(k - 2) < 0$$

Ahora en la recta real:



$\therefore$ $\mathbf{k \in \langle -6 ; 2\rangle}$

Clave: A

PROBLEMA 17

El conjunto solución de la inecuación:

$$(x - 1)^3(x^2 + 3x + 4)(x^3 - 1) > 0$$

es : $\langle -\infty ; a\rangle \cup \langle b ; \infty\rangle$. Calcular: $a^2 + b^2$

A) − 3 B) − 2 C) 2

D) 3 E) 4

Resolución:

La inecuación dada es :

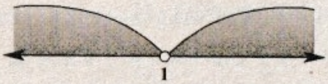
$$(x - 1)^3(x^2 + 3x + 4)(x - 1)(x^2 + x + 1) > 0$$

Una rápida inspección permite reconocer a los trinomios positivos: $x^2 + 3x + 4$, $x^2 + x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$; ahora la inecuación dada queda reducida a:

$$(x - 1)^3 \cdot (x - 1) > 0$$

$$(x - 1)^4 > 0$$

Por puntos de referencia:



$$CS = \langle -\infty ; 1\rangle \cup \langle 1 ; \infty\rangle$$

Por condición tenemos: a = 1 y b = 1

$$\therefore \qquad \mathbf{a^2 + b^2 = 2}$$

Clave: C

PROBLEMA 18

Resolver:

$(x^2+x+1)(x^4+x^2+1)(x+2)^3(x^2-1)>0$

A) $\langle -2 ; -1 \rangle \cup \langle 1 ; \infty \rangle$

B) $\langle 1 ; 2 \rangle \cup \langle 3 ; \infty \rangle$

C) $[-2 ; -1\rangle \cup \langle 1 ; \infty \rangle$

D) $\langle -2 ; -1] \cup \langle 1 ; \infty \rangle$

E) $\langle -\infty; -2 \rangle \cup \langle -1 ; 1\rangle$

Resolución:

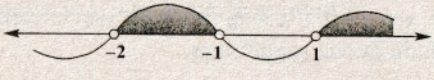
Una rápida inspección permite reconocer un par de trinomios positivos: x^2+x+1, $x^4+x^2+1>0, \forall x \in \mathbb{R}$, ahora la inecuación dada queda reducida a:

$$(x+2)^3\,(x^2-1)>0$$

Transformando tenemos:

$$(x+2)^3\,(x+1)(x-1)>0$$

Por puntos de referencia



$$\therefore \qquad \mathbf{C.S. = \langle -2 ; -1 \rangle \cup \langle 1 ; \infty \rangle}$$

Clave: A

PROBLEMA 19

Resolver:

$$\frac{(x-2)^4(x-1)^5(x+1)^2}{(x^2+4)(x-3)^7} \le 0$$

A) $[-1 ; 1]$ B) $[1 , 3\rangle$

C) $[1 ; 3\rangle \cup \{-1\}$ D) $[-1 ; 2]$

E) $[-1 ; 2] \cup \{3\}$

Resolución:

Observa que: $x^2+4>0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$, ahora la inecuación dada queda reducida a:

$$\frac{(x-2)^4(x-1)^5(x+1)^2}{(x-3)^7} \le 0$$

Por puntos de referencia:

$$\therefore \qquad \mathbf{C.S. = [1 ; 3 \rangle \cup \{-1\}}$$

Clave: C

PROBLEMA 20

Determine el menor número racional "m" de modo que para cualquier $x \in [2 ; 4]$ satisface la desigualdad:

$$\frac{x+3}{x-5} \le m$$

A) $-\dfrac{2}{3}$ B) $-\dfrac{1}{3}$ C) $-\dfrac{5}{3}$

D) -7 E) -6

Resolución:

Fácilmente podemos notar que:

$$\frac{x+3}{x-5}=1+\frac{8}{x-5}$$

Por condición $x \in [2\,,4]$, es decir:

$$2 \le x \le 4$$

Sumando (–5) obtenemos:

$$-3 \le x-5 \le -1$$

Tomando el recíproco:

$$-1 \le \frac{1}{x-5} \le -\frac{1}{3}$$

Multiplicando por (8) tenemos:

$$-8 \le \frac{8}{x-5} \le -\frac{8}{3}$$

Finalmente sumando (1):

$$-7 \le 1+\frac{8}{x-5} \le -\frac{5}{3}$$

$$-7 \le \boxed{\frac{x+3}{x-5} \le -\frac{5}{3}}$$

$$\therefore \qquad \mathbf{m = -\frac{5}{3}}$$

Clave: C

PROBLEMA 21

Resolver: $\quad 1 < \dfrac{3x+10}{x+7} < 2$

A) $\langle -\frac{1}{2}\ ;\ 7\rangle$ B) $\langle -1\ ;\ 5\rangle$ C) $\langle -\frac{3}{2}\ ;\ 4\rangle$

D) $\langle\ 0\ ;4\ \rangle$ E) $\langle\ 1\ ,5\ \rangle$

Resolución:

La inecuación dada es: $1 < \dfrac{3x+10}{x+7} < 2$

Sumando (-3) tenemos:

$$1-3 < \frac{3x+10}{x+7}-3 < 2-3$$

$$-2 < \frac{-11}{x+7} < -1$$

Multiplicando por $-\dfrac{1}{11}$:

$$\frac{1}{11} < \frac{1}{x+7} < \frac{2}{11}$$

Tomando el recíproco: $\quad \dfrac{11}{2} < x+7 < 11$

Finalmente sumando (–7): $-\dfrac{3}{2} < x < 4$

$$\therefore \qquad \mathbf{C.S. = \langle -\frac{3}{2}\ ;\ 4\rangle}$$

Clave: C

PROBLEMA 22

Resolver: $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt[3]{x^2-9} \ge 0$

A) $[3\ ;\infty\rangle$ B) $[2\ ;\infty\rangle$ C) $[9\ ;\infty\rangle$

D) $[3\ ;9]$ E) $[3\ ;\infty\rangle \cap \{2\}$

Resolución:

La inecuación dada es :

$$\sqrt{x-2}\cdot\sqrt[3]{x^2-9} \ge 0$$

De acuerdo con el conjunto de valores admisibles (C.V.A) en $\mathbb{R}$ para el radical de índice par debemos plantear:

$$x - 2 \ge 0 \quad \longleftrightarrow \quad x \ge 2$$

Ahora la inecuación:

$$\sqrt{x-2}\ \sqrt[3]{x^2-9} \geq 0$$

Queda reducida a: $\sqrt[3]{x^2-9} \geq 0$

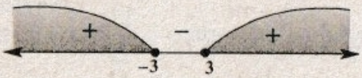
Pues $\sqrt{x-2} \geq 0$; $\forall x \geq 2$:

$$\sqrt[3]{x^2-9} \geq 0$$

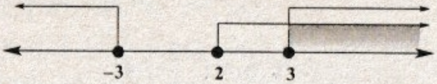
Elevando al cubo: $x^2 - 9 \geq 0$

$$(x+3)(x-3) \geq 0$$

En la recta real:



Pero recuerda que $x \geq 2$, luego:



$\therefore$ **C.S. = $[3\ ;\ \infty\rangle \cup \{2\}$**

Clave: E

PROBLEMA 23

Determine la cantidad de valores enteros que asume "x" en la siguiente inecuación:

$$\sqrt{2-\sqrt{9-x}} \geq 1$$

A) 2 B) 3 C) 4

D) 5 E) 6

Resolución:

La inecuación dada es:

$$\sqrt{2-\sqrt{9-x}} \geq 1$$

De acuerdo con la forma:

$$2-\sqrt{9-x} \geq 0 \quad \wedge \quad 2-\sqrt{9-x} \geq 1$$

Transformando tenemos:

$$\sqrt{9-x} \leq 2 \quad \wedge \quad \sqrt{9-x} \leq 1$$

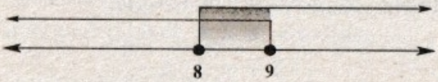
De la intersección obtenemos: $\sqrt{9-x} \leq 1$

Ahora según la forma:

$$9-x \geq 0 \quad \wedge \quad 9-x \leq 1$$

$$x \leq 9 \quad \wedge \quad x \geq 8$$

Finalmente en la recta real:



Notamos que los valores enteros que asume "x" son 8 y 9

$\therefore$ **Nº valores = 2**

Clave: A

PROBLEMA 24

Determine el supremo del conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\sqrt{10-x} - \sqrt{4-\sqrt{8-x}} > 0$$

A) 4 B) 5 C) 6

D) 7 E) 8

Resolución:

La inecuación dada es :

$$\sqrt{10-x} > \sqrt{4-\sqrt{8-x}}$$

De donde se cumple:

$$10-x \geq 0 \quad \wedge \quad 4-\sqrt{8-x} \geq 0$$

$$\wedge \quad 10-x > 4-\sqrt{8-x}$$

Reacomodando tenemos:

$$x \le 10 \wedge \underbrace{\sqrt{8-x} \le 4}_{\text{I}} \wedge \underbrace{\sqrt{8-x} > x-6}_{\text{II}} \; ..(1)$$

Hallemos la solución I: $\sqrt{8-x} \le 4$

$$8-x \ge 0 \quad \wedge \quad 8-x \le 16$$

$$x \le 8 \quad \wedge \quad x \ge -8$$

$$-8 \le x \le 8 \qquad ...(2)$$

Hallemos la solución II: $\sqrt{8-x} > x-6$

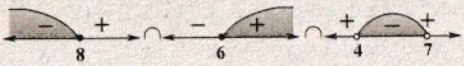
S_1: $8-x \ge 0 \wedge x-6 \ge 0 \wedge 8-x > (x-6)^2$

$x-8 \le 0 \;\wedge\; x-6 \ge 0 \;\wedge\; 8-x > x^2-12x+36$

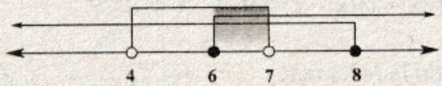
$x-8 \le 0 \wedge\; x-6 \ge 0 \;\wedge\; -x^2+11x-28 > 0$

$x-8 \le 0 \wedge\; x-6 \ge 0 \;\wedge\; x^2-11x+28 < 0$

$x-8 \le 0 \wedge\; x-6 \ge 0 \;\wedge\; (x-7)(x-4) < 0$



De la intersección:

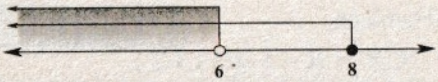


Podemos observar que: $\quad 6 \le x < 7$

S_2: $\quad 8-x \ge 0 \quad \wedge \quad x-6 < 0$

$\qquad x \le 8 \quad \wedge \quad x < 6$

De la intersección:

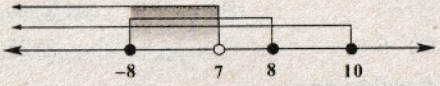


Podemos observar que: $x < 6$

Recuerda que la solución II viene dada por $S_1 \cup S_2$, es decir:

$$x < 6 \;\vee\; 6 \le x < 7 \quad \longleftrightarrow \quad x < 7 \; ...(3)$$

Finalmente con: (1), (2) y (3)



El conjunto solución es:

$$CS = [-8\,;\,7\rangle$$

$\therefore$ **Sup(CS) = 7**

Clave: D

PROBLEMA 25

Determine la suma de soluciones reales de la ecuación:

$$|x|^3 + |x| - 3 = x^3$$

A) 3 B) 5 C) −2

D) -3 E) 2

Resolución:

La ecuación dada es: $|x|^3 + |x| - 3 = x^3$

Primer caso: $\quad x \ge 0$

$$x^3 + x - 3 = x^3 \quad \longleftrightarrow \quad x - 3 = 0$$

$x = 3$ ***¡es la solución!***

Segundo caso: $\quad x < 0$

$$-x^3 - x - 3 = x^3 \longleftrightarrow -2x^3 - x - 3 = 0$$

$$2x^3 + x + 3 = 0 \longleftrightarrow (x+1)(2x^2-2x+3) = 0$$

Observa que: $2x^2 - 2x + 3 > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$, razón por la cual la igualdad anterior se reduce a : $x + 1 = 0$

$x = -1$ ***¡es la solución!***

$\therefore$ **Σ de soluciones = 2**

Clave: E

PROBLEMA 26

Determine el producto de soluciones de la ecuación: $|2x-6| + |15-5x| = 14$

A) –5 B) 5 C) 6
D) –6 E) 25

Resolución:

La ecuación dada es:

$$|2(x-3)|+|5(3-x)|=14$$

Por teorema tenemos:

$$2|x-3|+5|3-x|=14$$
$$2|x-3|+5|x-3|=14$$
$$7|x-3|=14$$
$$|x-3|=2$$

De donde obtenemos:

$$x-3=2 \ \vee \ x-3=-2$$
$$x=5 \ \vee \ x=1$$

$\therefore$ **Π de soluciones = 5**

Clave: B

PROBLEMA 27

Determine el número de soluciones de la ecuación: $||x|-3|=|3-2|x||$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

Resolución:

La ecuación dada es:

$$||x|-3|=|3-2|x||$$

Por propiedad tenemos:

$$(|x|-3+3-2|x|)\cdot(|x|-3-3+2|x|)=0$$
$$(-|x|)\cdot(3|x|-6)=0$$

De donde se cumple:

$$-|x|=0 \ \vee \ 3|x|-6=0$$
$$|x|=0 \ \vee \ 3|x|=6$$
$$|x|=0 \ \vee \ |x|=2$$
$$x=0 \ \vee \ (x=2 \ \vee \ x=-2)$$

Finalmente tenemos:

$$CS=\{0;2;-2\}$$

$\therefore$ **Nº de soluciones = 3**

Clave: D

PROBLEMA 28

Resolver: $|x^2+3x|+x^2-2\geq 0$

A) $\langle -\infty;-2]\cup[1/2;\infty\rangle$
B) $\langle -\infty;-2/3]$ C) $[-2/3;1/2]$
D) $[-2;-2/3]$ E) $\mathbb{R}-\langle -2/3;1/2\rangle$

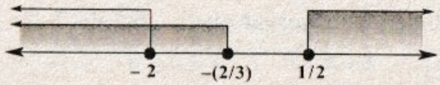
Resolución:

La inecuación dada es: $|x^2+3x|\geq 2-x^2$

Por teorema debemos plantear lo siguiente:

$$x^2+3x\geq 2-x^2 \ \vee \ x^2+3x\leq -(2-x^2)$$
$$x^2+3x\geq 2-x^2 \ \vee \ x^2+3x\leq -2+x^2$$
$$2x^2+3x-2\geq 0 \ \vee \ 3x\leq -2$$
$$(2x-1)(x+2)\geq 0 \ \vee \ x\leq -\frac{2}{3}$$

En la recta real:



Podemos notar:

$$CS=\langle -\infty;-2/3]\cup[-1/2;\infty\rangle$$

O también:

$$\textbf{C.S.} = \mathbb{R}-\langle -2/3;1/2\rangle$$

Clave: E

PROBLEMA 29

Resolver:

$$|x^2-2x+4|+|x+1|<x^2$$

A) $\langle 1 , 5\rangle$ B) $\langle 2 ; 5\rangle$ C) $\langle 5 ; \infty\rangle$

D) $\langle 1 ; 2\rangle \cup \langle 5 ; \infty\rangle$ E) $\langle 1 ; \infty \rangle$

Resolución:

Una rápida inspección permite observar que: $x^2 - 2x + 4 > 0; \forall x \in \mathbb{R}$

Con lo cual $|x^2 - 2x + 4| = x^2 - 2x + 4$

La inecuación dada es:

$$x^2 - 2x + 4 + |x + 1| < x^2$$

$$|x + 1| < 2x - 4$$

Por teorema tenemos:

$$2x - 4 > 0 \ \wedge \ -(2x - 4) < x + 1 < (2x - 4)$$

$$2(x - 2) > 0 \ \wedge \ -2x + 4 < x + 1 < 2x - 4$$

$$x - 2 > 0 \ \wedge \ \underbrace{-2x + 4 < x + 1 < 2x - 4}_{I} \ ...(1)$$

Resolviendo I:

$$x + 1 > -2x + 4 \ \wedge \ 2x - 4 > x + 1$$

$$3x > 3 \ \wedge \ x > 5$$

$$x > 1 \ \wedge \ x > 5 \longleftrightarrow x > 5 ...(2)$$

Ahora con (1) y (2):

$$x - 2 > 0 \ \wedge \ x > 5$$

$$x > 2 \ \wedge \ x > 5 \longleftrightarrow x > 5$$

$$\therefore \quad \textbf{C.S.} = \langle 5 ; \infty \rangle$$

Clave: C

PROBLEMA 30

Determine el número de soluciones enteras de la inecuación

$$1 < \sqrt{x^2 + 4 - 4x} \leq 3$$

A) 3 B) 4 C) 5

D) 6 E) 7

Resolución:

La inecuación dada es:

$$1 < \sqrt{(x-2)^2} \leq 3$$

$$1 < |x - 2| \leq 3$$

Por propiedad tenemos:

$$-3 \leq x - 2 < -1 \ \vee \ 1 < x - 2 \leq 3$$

Sumando (2) obtenemos:

$$-1 \leq x < 1 \ \vee \ 3 < x \leq 5$$

Los valores enteros x son: $-1 ; 0 ; 4 ; 5$

$\therefore$ **Nº de soluciones enteras = 4**

Clave: B

PROBLEMA 31

Calcular: $\left[\!\left[\dfrac{5 - 3\pi}{\pi + 2}\right]\!\right]$

A) -1 B) –2 C) 1

D) 0 E) 2

Resolución:

Observa que : $\dfrac{5 - 3\pi}{\pi + 2} = -3 + \dfrac{11}{\pi + 2}$

Con lo cual tenemos:

$$\left[\!\left[\frac{5 - 3\pi}{\pi + 2}\right]\!\right] = \left[\!\left[-3 + \frac{11}{\pi + 2}\right]\!\right]$$

Por teorema:

$$\left[\!\left[\frac{5 - 3\pi}{\pi + 2}\right]\!\right] = -3 + \left[\!\left[\frac{11}{\pi + 2}\right]\!\right] \ ...(1)$$

Ahora planteamos: $3 < \pi < 4$

Sumando (2) tenemos: $5 < \pi + 2 < 6$

Tomando el recíproco: $\dfrac{1}{6} < \dfrac{1}{\pi + 2} < \dfrac{1}{5}$

Multiplicando por (11): $\frac{11}{6} < \frac{11}{\pi+2} < \frac{11}{5}$

$$1{,}8 < \frac{11}{\pi+2} < 2{,}2$$

Ahora notamos que:

$$\left[\!\left[\frac{11}{\pi+2} \right]\!\right] = 2 \qquad ...(2)$$

Finalmente (2) en (1):

$$\left[\!\left[\frac{5-3\pi}{\pi+2} \right]\!\right] = -3+2$$

$$\therefore \left[\!\left[\frac{5-3\pi}{\pi+2} \right]\!\right] = -1$$

Clave: A

PROBLEMA 32

Resolver: $\left[\!\left[\frac{|x-1|+2}{3} \right]\!\right] = 4$

A) $\langle -12 ; -9 \rangle \cup \langle 11 ; 14 \rangle$

B) $\langle -12 ; -8] \cup [10 ; 15 \rangle$

C) $\langle -11 ; -9] \cup [11 ; 14 \rangle$

D) $\langle -12 ; -9] \cup [11 ; 14 \rangle$

E) $\langle -10 ; -8] \cup [10 ; 13 \rangle$

Resolución:

Por teorema : $4 \leq \frac{|x-1|+2}{3} < 5$

$$12 \leq |x-1|+2 < 15$$

Sumando (-2): $10 \leq |x-1| < 13$

Por propiedad:

$-13 < x-1 \leq -10 \quad \vee \quad 10 \leq x-1 < 13$

$-12 < x \leq -9 \quad \vee \quad 11 \leq x < 14$

$\therefore \quad$ **C.S.** $= \langle -12 ; -9] \cup [11 ; 14\rangle$

Clave: D

PROBLEMA 33

Resolver: $[\![3x-5]\!] = 2x+1$

A) $\{6\}$

B) $\{6 ; 13/2\}$

C) $\{5 ; 11/2\}$

D) $[6 ; 13/2]$

E) $\langle 6 ; 13/2 \rangle$

Resolución

Hagamos que: $2x + 1 = n$; donde $n \in \mathbb{Z}$, pues es un máximo entero.

$$x = \frac{n-1}{2} \qquad ...(1)$$

En la ecuación: $\left[\!\left[3\left(\frac{n-1}{2}\right) - 5 \right]\!\right] = n$

$$\left[\!\left[\frac{3n-3}{2} - 5 \right]\!\right] = n \Rightarrow \left[\!\left[\frac{3n-13}{2} \right]\!\right] = n$$

Por teorema: $n \leq \frac{3n-13}{2} < n+1$

$$2n \leq 3n - 13 < 2n + 2$$

Equivalentemente:

$$3n - 13 \geq 2n \ \wedge \ 3n - 13 < 2n + 2$$

$$n \geq 13 \ \wedge \ n < 15$$

Como $n \in \mathbb{Z}$, tenemos: $n = 13$ ó $n = 14$

En (1) obtenemos:

$n = 13 \rightarrow x = 6$

$n = 14 \rightarrow x = 13/2$

$\therefore \quad$ **C.S.** $= \{6 ; \frac{13}{2}\}$

Clave: B

PROBLEMA 34

Resolver: $\left[\!\left[\frac{x}{3}\right]\!\right]-x=2$

A) $\{-2\,;-3\}$ B) $\{-1\,;-3\}$ C) $\{-4\,;-3\}$
D) $\{-4\,;-5\}$ E) $\{-4\}$

Resolución:

La ecuación dada es $\left[\!\left[\frac{x}{3}\right]\!\right]=x+2$

Hagamos que: $x+2=n$; donde $n\in\mathbb{Z}$, pues es un máximo entero

$$x=n-2 \quad \text{.... (1)}$$

En la ecuación: $\left[\!\left[\frac{n-2}{3}\right]\!\right]=n$

Por teorema: $n\le\frac{n-2}{3}<n+1$

$$3n\le n-2<3n+3$$

Equivalentemente:

$$3n\le n-2 \;\wedge\; 3n+3>n-2$$

$$2n\le -2 \;\wedge\; 2n>-5$$

$$n\le -1 \;\wedge\; n>-\frac{5}{2}$$

Como $n\in\mathbb{Z}$, tenemos: $n=-2$ ó $n=-1$

En (1) obtenemos:

$$n=-2 \;\rightarrow\; x=-4$$

$$n=-1 \;\rightarrow\; x=-3$$

$$\therefore\quad \textbf{C.S.}=\{-4\,;-3\}$$

Clave: C

PROBLEMA 35

Determine el ínfimo y el supremo del siguiente conjunto.

$$A=\left\{\left|\frac{1}{x-4}\right| \Big/ |x|<3\right\}$$

Indicar como respuesta su suma:

A) 8/7 B) 4/7 C) 9/7
D) 3/7 E) 11/7

Resolución:

En busca del elemento genérico del conjunto **A** apartir de la condición:

$$|x|<3$$

$$-3<x<3$$

Sumando (–4) tenemos:

$$-7<x-4<-1$$

$$-1<\frac{1}{x-4}<-\frac{1}{7}$$

Con el valor absoluto:

$$\frac{1}{7}<\left|\frac{1}{x-4}\right|\le 1$$

Ínfimo ($\frac{1}{7}$) — Supremo (1)

Finalmente tenemos:

$$\text{Inf}(A)+\text{Sup}(A)=\frac{1}{7}+1$$

$$\therefore\ \textbf{Inf(A)}+\textbf{Sup(A)}=\mathbf{\frac{8}{7}}$$

Clave: A

PROBLEMA 36

Determine el producto entre el ínfimo y el supremo del siguiente conjunto:

$$A=\left\{\left[\!\left[\frac{x+4}{x+3}\right]\!\right] \Big/ -2\le x\le 2\right\}$$

A) 1 B) 2 C) 1/2
D) 1/4 E) 3/4

Resolución:

Podemos observar que:

$$\frac{x+4}{x+3}=1+\frac{1}{x+3}$$

Por condición tenemos: $-2\leq x\leq 2$

Sumando (3) tenemos: $1\leq x+3\leq 5$

$$\frac{1}{5}\leq\frac{1}{x+3}\leq 1$$

Sumando (1) obtenemos:

$$\frac{6}{5}\leq 1+\frac{1}{x+3}\leq 2$$

$$\frac{6}{5}\leq\frac{x+4}{x+3}\leq 2$$

En forma equivalente:

$$1<\frac{x+4}{x+3}<2 \quad\vee\quad \frac{x+4}{x+3}=2$$

De donde podemos notar que:

$$\left[\!\left[\frac{x+4}{x+3}\right]\!\right]=1 \quad\vee\quad \left[\!\left[\frac{x+4}{x+3}\right]\!\right]=2$$

Con lo cual afirmamos que:

Inf(A) = 1 y Sup(A) = 2

$\therefore$ **Inf(A) . Sup(A) = 2**

Clave: B

PROBLEMA 37

Determine la longitud del conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$(x-1)^{-1}+(x-2)^{-1}\geq 2008$$

A) 999^{-1} B) 1001^{-1} C) 1004^{-1}
D) 2008^{-1} E) 2007^{-1}

Resolución

Si hacemos que 2008 = m, la inecuación dada presentará la siguiente forma:

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-m\geq 0$$

Efectuando:

$$\frac{-mx^2+(3m+2)x-(2m+3)}{(x-1)(x-2)}\geq 0$$

Multiplicando por -1:

$$\frac{mx^2-(3m+2)x+(2m+3)}{(x-1)(x-2)}\leq 0$$

Hallemos los puntos de corte, para lo cual igualaremos a cero cada término de la fracción:

$$mx^2-(3m+2)x+(2m+3)=0$$

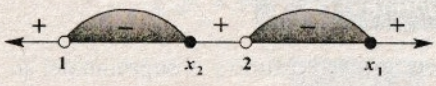
$$x_{1,2}=\frac{3m+2\pm\sqrt{m^2+4}}{2m}$$

$$x_1=\frac{3m+2+\sqrt{m^2+4}}{2m}$$

$$x_2=\frac{3m+2-\sqrt{m^2+4}}{2m}$$

$(x-1)(x-2)=0 \longleftrightarrow x=1 \vee x=2$

Una rápida inspección permite observar que: $x_1>2$, asimismo podemos notar que: $1<x_2<2$



Observa que: $CS = \langle 1 ; x_2] \cup \langle 2 ; x_1]$

Finalmente hallemos la longitud del conjunto solución (C.S.), según la teoría:

$$LI = (x_2 - 1) + (x_1 - 2)$$

$$LI = (x_1 + x_2) - 3 = \frac{3m+2}{m} - 3$$

$$LI = 3 + \frac{2}{m} - 3 = \frac{2}{m}$$

$$LI = \frac{2}{2008}$$

$$\therefore \quad \mathbf{LI = \frac{1}{1004}}$$

Clave: C

PROBLEMA 38

Resolver:

$$\frac{x^2}{[\,(x+1)-\sqrt{x+1}\,]^2} < \frac{x^2+3x+18}{(x+1)^2}$$

A) $\mathbb{R}$ B) $\langle -1 ; \infty\rangle$ C) ϕ

D) $\langle -1 ; 3\rangle - \{0\}$ E) $\langle 0 ; \infty\rangle$

Resolución:

Hagamos que: $\sqrt{x+1} = m$; luego:
$x = m^2 - 1$, ahora la inecuación dada asume la forma:

$$\frac{(m^2-1)^2}{(m^2-m)^2} < \frac{(m^2-1)^2+3(m^2-1)+18}{m^4}$$

$$\frac{(m+1)^2(m-1)^2}{m^2\cdot(m-1)^2} < \frac{m^4+m^2+16}{m^4} \quad ....(*)$$

Si $m \neq 0$, entonces: $x \neq -1$
Si $m \neq 1$, entonces: $x \neq 0$
En $(*)$ tenemos:

$$m^2\cdot(m+1)^2 < m^4+m^2+16$$

$$m^4+2m^3+m^2 < m^4+m^2+16$$

$$2m^3-16<0$$

$$m^3-8<0$$

Por diferencia de cubos:

$$(m-2)(m^2+2m+4)<0$$

Como: $m^2+2m+4>0 \,;\, \forall\, m \in \mathbb{R}$:

$$m-2<0$$

$$m<2$$

Reponiendo a la incógnita: $\sqrt{x+1} < 2$

De acuerdo con la teoría:

$$x+1 \geq 0 \ \wedge \ x+1<4$$

$$x \geq -1 \ \wedge \ x<3$$

$$-1 \leq x < 3$$

Pero: $x \neq -1 \,;\, x \neq 0$:

$$-1<x<3 \ ; \ x\neq 0$$

$$\therefore \quad \mathbf{C.S. = \langle -1 ; 3\rangle - \{0\}}$$

Clave: D

PROBLEMA 39

Si $a<b<0$, determine el conjunto al cual pertenece x de tal modo que:

$$\frac{x+b}{x+a} - \frac{x-b}{x-a} \leq \frac{2(b^2-ab)}{x^2-a^2}$$

A) $\langle -\infty ; a\rangle \cup [\,b ; -a\rangle$

B) $\langle -a ; a\rangle \cup \langle 0 ; 2b\rangle$

C) $\langle a ; -a\rangle \cup \langle b ; 2b\rangle$

D) $\langle a ; -a\rangle \cup [\,2b ; \infty\rangle$

E) $\langle -\infty ; -b\,] \cup \langle a ; -a\rangle \cup [\,2b ; \infty\rangle$

Resolución:

La inecuación dada es:

$$\frac{x+b}{x+a}-\frac{x-b}{x-a}-\frac{2(b^2-ab)}{(x+a)(x-a)}\leq 0$$

Efectuando operaciones:

$$\frac{(x+b)(x-a)-(x-b)(x+a)-2(b^2-ab)}{(x+a)(x-a)}\leq 0$$

$$\frac{x^2+(b-a)x-ab-x^2-(a-b)x+ab-2(b^2-ab)}{(x+a)(x-a)}\leq 0$$

Reduciendo términos:

$$\frac{-2(a-b)x+2b(a-b)}{(x+a)(x-a)}\leq 0$$

$$\frac{-2(a-b)(x-b)}{(x+a)(x-a)}\leq 0 \qquad ....(*)$$

Por condición tenemos:

$$a<b \longleftrightarrow (a-b)<0$$

Es evidente apreciar: $-2(a-b)>0$

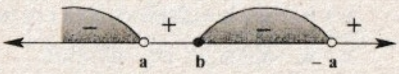
Ahora en $(*)$ tenemos:

$$\frac{x-b}{(x+a)(x-a)}\leq 0$$

Según puntos de corte:

$$x=b\ ;\ x=-a\ ;\ x=a$$

Finalmente con $a<b<0$:



$\therefore$ **C.S. = $\langle -\infty\ ;\ a\rangle \cup [\ b\ ;\ -a\rangle$**

Clave: A

PROBLEMA 40

Resolver:

$$\left|\,\left|\,|x+4|-9\,\right|+x^2\,\right|\leq x\,(x+1)+1$$

A) $[2\ ;\infty\rangle$ B) $\langle -\infty\ ;2]$ C) $\langle 0\ ;2]$

D) $\langle 1\ ;\infty\rangle$ E) $\langle 2\ ;\infty\rangle$

Resolución:

Una rápida inspección permite apreciar que: $\left|\,|x+4|-9\,\right|+x^2>0\ ;\forall x\in\mathbb{R}$ luego la inecuación dada es:

$$\left|\,|x+4|-9\,\right|+x^2\leq x^2+x+1$$

$$\left|\,|x+4|-9\,\right|\leq x+1$$

Resulta evidente que: $x+1\geq 0$, en consecuencia: $|x+4|=x+4$, por tanto tenemos:

$$|x+4-9|\leq x+1$$

$$|x-5|\leq x+1$$

De donde se cumple que:

$$x+1\geq 0\wedge(-x-1\leq x-5\leq x+1)$$

$$x+1\geq 0\wedge(x-5\geq -x-1\wedge x-5\leq x+1)$$

$$x+1\geq 0\wedge(2x\geq 4\ \wedge\ \underbrace{0x\leq 6}_{x\in\mathbb{R}})$$

Simplificando tenemos:

$$x+1\geq 0\ \wedge\ 2x\geq 4$$

$$x\geq -1\ \wedge\ x\geq 2$$

De la intersección resulta:

$$x\geq 2 \longleftrightarrow x\in[2\ ;\infty\rangle$$

$\therefore$ **C.S. = $[2\ ;\ \infty\rangle$**

Clave: A

PROBLEMA 41

¿Cuántos elementos tiene el conjunto solución de la ecuación:

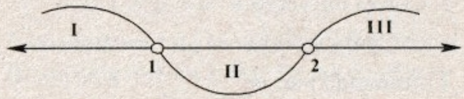
$$|x-1|+|x-2|=x+7?$$

A) 0 B) 1 C) 2

D) 3 E) 4

Resolución:

Redefiniendo la ecuación planteamos un criterio por zonas, veamos:



Observa que cada punto que limita la zona fue obtenido igualando a cero cada valor absoluto.

I. $-\infty < x < 1$

$$|x-1|+|x-2|=x+7$$

Eliminando barras:

$$-(x-1)-(x-2)=x+7$$

$$-2x+3=x+7 \longleftrightarrow -\frac{4}{3}=x$$

Como $x=-\frac{4}{3}$ se encuentra en la zona analizada, $-\frac{4}{3}$ es la solución de la ecuación.

II. $1 \leq x < 2$

$$|x-1|+|x-2|=x+7$$

Eliminando barras:

$$x-1-(x-2)=x+7$$

$$1=x+7 \longleftrightarrow -6=x$$

Como $x=-6$ no se encuentra en la zona analizada, -6 no es solución de la ecuación.

III. $2 \leq x < \infty$

$$|x-1|+|x-2|=x+7$$

Eliminando barras:

$$x-1+x-2=x+7$$

$$2x-3=x+7 \longleftrightarrow x=10$$

Resulta evidente que $x=10$ es solución de la ecuación, luego tenemos que:

$$\text{C.S.}=\left\{-\frac{4}{3}\ ;\ 10\right\}$$

$$\therefore\ \mathbf{n(C.S.)=2}$$

Clave: C

PROBLEMA 42

Identifica un intervalo solución de la siguiente inecuación:

$$\frac{|2x+3|-|x-8|}{|2x-1|-|7x-8|} \geq 0$$

A) $[-11\ ;\ -\frac{9}{5}\rangle$ B) $\langle 0\ ;\ 2\rangle$

C) $\langle -11\ ;\ 0\rangle$ D) $\langle \frac{7}{5}\ ;\ \frac{5}{3}]$

E) $\langle \frac{5}{3}\ ;\ \infty\rangle$

Resolución:

Con la finalidad de eliminar al valor absoluto, multiplicaremos a ambos miembros de la inecuación por la siguiente expresión positiva:

$$\frac{|2x+3|+|x-8|}{|2x-1|+|7x-8|}$$

En la inecuación:

$$\frac{(|2x+3|+|x-8|)(|2x+3|-|x-8|)}{(|2x-1|+|7x-8|)(|2x-1|-|7x-8|)} \geq 0$$

Por diferencia de cuadrados:

$$\frac{|2x+3|^2-|x-8|^2}{|2x-1|^2-|7x-8|^2} \geq 0$$

Por teoremas tenemos:

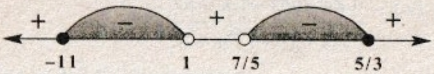
$$\frac{(2x+3)^2-(x-8)^2}{(2x-1)^2-(7x-8)^2}\geq 0$$

$$\frac{(3x-5)(x+11)}{(9x-9)(-5x+7)}\geq 0$$

Multiplicando por -9:

$$\frac{(3x-5)(x+11)}{(x-1)(5x-7)}\leq 0$$

Finalmente en la recta real ubicamos ordenadamente a los puntos: 5/3 ; –11 ; 1 ; 7/5 y obtenemos:



$$\therefore\ \textbf{C.S.} = [-11\ ;\ 1\rangle \cup \langle \frac{7}{5}\ ;\ \frac{5}{3}]$$

Clave: D

PROBLEMA 43

Determine la cantidad de elementos enteros que tiene el complemento del conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-8x+16}\geq\sqrt{x^2-10x+25}$$

A) 0 B) 1 C) 2

D) 3 E) Más de 3

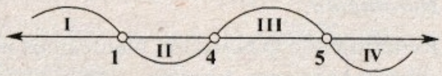
Resolución:

La inecuación dada es :

$$\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-4)^2}\geq\sqrt{(x-5)^2}$$

$$|x-1|+|x-4|\geq|x-5|$$

Por criterio de zonas:



I. Con el universo: $-\infty < x < 1$

$$|x-1|+|x-4|\geq|x-5|$$

Eliminando barras:

$$-(x-1)-(x-4)\geq-(x-5)$$

$$-2x+5\geq-x+5$$

$$-x\geq 0 \longleftrightarrow x\leq 0$$

Intersectando con el universo obtenemos la primera solución, en efecto:

$$\text{C.S.(I)} = \langle-\infty\ ;0]$$

II. Con el universo: $1\leq x<4$

$$|x-1|+|x-4|\geq|x-5|$$

Eliminando barras:

$$x-1-(x-4)\geq-(x-5)$$

$$3\geq-x+5$$

$$x\geq 2$$

Intersectando con el universo obtenemos la segunda solución, en efecto:

$$\text{C.S.(II)} = [2\ ;4\rangle$$

III. Con el universo: $4\leq x<5$

$$|x-1|+|x-4|\geq|x-5|$$

Eliminando barras:

$$x-1+x-4\geq-(x-5)$$

$$2x-5\geq-x+5$$

$$3x\geq 10 \longleftrightarrow x\geq\frac{10}{3}$$

Intersectando con el universo obtenemos la tercera solución, en efecto:

$$\text{C.S.(III)} = [4\ ;5\rangle$$

IV. Con el universo: $5\leq x<\infty$

$$|x-1|+|x-4|\geq|x-5|$$

Eliminando barras:

$$x - 1 + x - 4 \geq x - 5$$

$$2x - 5 \geq x - 5$$

$$x \geq 0$$

Intersectando con el universo obtenemos la cuarta y última solución, en efecto:

$$C.S.(IV) = [5 ; \infty\rangle$$

Finalmente el conjunto solución de la inecuación estará representada por la unión de todas las soluciones encontradas, veamos:

$CS = \langle -\infty ; 0] \cup [2 ; 4\rangle \cup [4 ; 5\rangle \cup [5 ; \infty \rangle$

$CS = \langle -\infty ; 0] \cup [2 ; \infty \rangle$

$\therefore$ **(CS)' = complemento del CS = $\langle 0 ; 2\rangle$**

Clave: B

PROBLEMA 44

Calcular: Inf(A) + Sup(A), siendo:

$A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x = t^2 + 3t \,;\, t \in \langle 0 ; 1\rangle \}$

A) –1 B) 2 C) 1

D) 4 E) 0

Resolución:

Redefiniendo al conjunto A, según intervalos:

$$x = t^2 + 3t = \left(t + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

Por condición tenemos: $0 < t < 1$

Sumando 3/2 obtenemos: $\frac{3}{2} < t + \frac{3}{2} < \frac{5}{2}$

$$\frac{9}{4} < \left(t + \frac{3}{2}\right)^2 < \frac{25}{4}$$

Sumando $-\frac{9}{4}$ conseguimos:

$$0 < \left(t + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} < \frac{16}{4}$$

$$0 < x < 4$$

Ínfimo (0) — Supremo (4)

Finalmente tenemos:

$$Inf(A) + Sup(A) = 0 + 4$$

$\therefore$ **Inf(A) + Sup(A) = 4**

Clave: D

PROBLEMA 45

Demostrar que $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} \geq x + y + z$$

Resolución:

Se sabe que:

$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz \,;\, \forall x, y, z, \in \mathbb{R}$

Transformando:

$2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2xy + 2xz + 2yz$

$x^2 + y^2 + z^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2) \geq x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$

$$3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2$$

$$\sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} \geq \sqrt{(x + y + z)^2}$$

$$\sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} \geq |x + y + z| \quad ....(1)$$

Se sabe que:

$|x + y + z| \geq x + y + z \,;\, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ ...(2)

Finalmente con (1) y (2) podemos aplicar la ley de transitividad, luego:

$$\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)} \geq x+y+z\ ;\forall x,y,z\in\mathbb{R}$$

Lqqd

PROBLEMA 46

Si a, b, c, d, x, y, z, w > 0, tal que: $\sqrt[a]{x}<\sqrt[b]{y}<\sqrt[c]{z}<\sqrt[d]{w}$ demostrar que: $\sqrt[a]{x}<\sqrt[a+b+c+d]{xyzw}<\sqrt[d]{w}$

Resolución:

Suponiendo que:

$$P=\sqrt[a]{x}<\sqrt[b]{y}<\sqrt[c]{z}<\sqrt[d]{w}$$

Podemos obtener:

$$P^a=x\ ;\ P^b<y\ ;\ P^c<z\ ;\ P^d<w$$

Multiplicando tenemos:

$$P^a\cdot P^b\cdot P^c\cdot P^d<x\cdot y\cdot z\cdot w$$
$$P^{a+b+c+d}<x\,y\,z\,w$$

Por ser números positivos:

$$P<\sqrt[a+b+c+d]{x\,y\,z\,w}$$
$$\downarrow$$
$$\sqrt[a]{x}<\sqrt[a+b+c+d]{x\,y\,z\,w}\quad ...(1)$$

Suponiendo que:

$$\sqrt[a]{x}<\sqrt[b]{y}<\sqrt[c]{z}<\sqrt[d]{w}=q$$

Podemos obtener:

$$x<q^a\ ;\ y<q^b\ ;\ z<q^c\ ;\ w=q^d$$

Multiplicando tenemos:

$$x\cdot y\cdot z\cdot w<q^a\cdot q^b\cdot q^c\cdot q^d$$
$$x\,y\,z\,w<q^{a+b+c+d}$$

Por ser números positivos:

$$\sqrt[a+b+c+d]{x\,y\,z\,w}<q$$
$$\downarrow$$
$$\sqrt[a+b+c+d]{x\,y\,z\,w}<\sqrt[d]{w}\ ...(2)$$

Finalmente con (1) y (2) damos por concluida la demostración:

$$\sqrt[a]{x}<\sqrt[a+b+c+d]{x\,y\,z\,w}<\sqrt[d]{w}$$

Lqqd

PROBLEMA 47

Si $a>0\ ;\ b^2-4ac<0$, demostrar que:

$$P(x)\equiv ax^2+bx+c>0\ ;\ \forall\, x\in\mathbb{R}$$

Resolución:

El polinomio dado es:

$$P(x)\equiv a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

Completando cuadrado:

$$P(x)\equiv a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right]\ ....(1)$$

Por condición tenemos:

$$b^2-4ac<0 \longleftrightarrow \frac{b^2-4ac}{4a^2}<0$$

Multiplicando por −1:

$$-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)>0\qquad ...(2)$$

Por teorema tenemos:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geq 0\qquad ...(3)$$

Sumando (2) y (3) m.a.m:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)>0$$

Multiplicando por $a>0$:

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right]>0$$

Finalmente según (1): $P(x) > 0$

$\therefore \quad \mathbf{ax^2 + bx + c > 0 \,;\, \forall x \in \mathbb{R}}$ *Lqqd*

PROBLEMA 48

Si $[\![a]\!] = [\![b]\!]$, demostrar que :

$$|a - b| < 1$$

Resolución:

Suponiendo que:

$[\![a]\!] = m$ y $[\![b]\!] = m \;;\; m \in \mathbb{Z}$

Por teorema:

$m \le a < m + 1 \longleftrightarrow m \le a < m + 1$

$m \le b < m + 1 \longleftrightarrow -m - 1 < -b \le -m$

Sumando m . a . m:

$$m - m - 1 < a - b < m + 1 - m$$

$$-1 < a - b < 1$$

$\therefore \quad \mathbf{|a - b| < 1}$ *Lqqd*

PROBLEMA 49

$\forall a, b \in \mathbb{R}$; demostrar que:

$[\![a]\!] + [\![b]\!] \le [\![a + b]\!] < [\![a]\!] + [\![b]\!] + 2$

Resolución:

Sean "m" y "n" enteros, luego podemos plantear lo siguiente:

$[\![a]\!] = m \longleftrightarrow m \le a < m + 1$

$[\![b]\!] = n \longleftrightarrow n \le b < n + 1$

Sumando tenemos:

$$m + n \le a + b < m + n + 2$$

De donde notamos que:

$[\![a + b]\!] = m + n$ ó $[\![a + b]\!] = m + n + 1$

En consecuencia:

$$m + n \le [\![a + b]\!] < m + n + 2$$

Reponiendo $m = [\![a]\!]$ y $n = [\![b]\!]$ se concluye la demostración:

$\therefore \quad \mathbf{[\![a]\!] + [\![b]\!] \le [\![a + b]\!] < [\![a]\!] + [\![b]\!] + 2}$;
$\mathbf{\forall a, b \in \mathbb{R}}$ *Lqqd*

PROBLEMA 50

Si $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}^*$. Demostrar que:

$$\left|\frac{bc}{a}\right| + \left|\frac{ac}{b}\right| + \left|\frac{ab}{c}\right| \ge |a + b + c|$$

Resolución:

Una rápida inspección permite apreciar que al ser a, b, y c distintos de cero: $\left|\frac{a}{b}\right|, \left|\frac{a}{c}\right|$ y $\left|\frac{b}{c}\right|$ son únicamente positivos.

Por propiedad se conoce que:

$$x + \frac{1}{x} \ge 2 \,;\, \forall x \in \mathbb{R}$$

En nuestro caso planteamos:

$$\left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{b}{a}\right| \ge 2 \qquad ....(1)$$

$$\left|\frac{a}{c}\right| + \left|\frac{c}{a}\right| \ge 2 \qquad ....(2)$$

$$\left|\frac{b}{c}\right| + \left|\frac{c}{b}\right| \ge 2 \qquad ....(3)$$

Multiplicando (1) por $|c|$:

$$\left|\frac{ac}{b}\right| + \left|\frac{bc}{a}\right| \ge 2|c|$$

Multiplicando (2) por $|b|$:

$$\left|\frac{ab}{c}\right| + \left|\frac{bc}{a}\right| \ge 2|b|$$

Multiplicando (3) por $|a|$:

$$\left|\frac{ab}{c}\right|+\left|\frac{ac}{b}\right|\geq 2|a|$$

Sumando m.a.m obtenemos:

$$2\left(\left|\frac{bc}{a}\right|+\left|\frac{ac}{b}\right|+\left|\frac{ab}{c}\right|\right)\geq 2(|a|+|b|+|c|)$$

$$\left|\frac{bc}{a}\right|+\left|\frac{ac}{b}\right|+\left|\frac{ab}{c}\right| \geq |a|+|b|+|c| \quad ...(4)$$

Por teorema se sabe que:

$|a|+|b|+|c|\geq|a+b+c|$; $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.. ...(5)

Finalmente aplicando la ley transitiva con (4) y (5) concluimos la demostración:

$$\left|\frac{\mathbf{bc}}{\mathbf{a}}\right|+\left|\frac{\mathbf{ac}}{\mathbf{b}}\right|+\left|\frac{\mathbf{ab}}{\mathbf{c}}\right|\geq|\mathbf{a+b+c}|\ ;\forall \mathbf{a,b,c}\in\mathbb{R}^*$$

Lqqd

PROBLEMA 51

Sean los conjuntos:

$A=\{x\in\mathbb{R}-\langle -3;1\rangle / x<2 \rightarrow x<5\}$

$B=\{x\in \mathbf{A} / x+2\notin \mathbf{A}\}=\langle m;n]$.

Calcular: m – n

A) –2 B) 0 C) 1
D) 2 E) 4

Resolución

Se sabe que: $p\rightarrow q\equiv\sim p\vee q$, luego para el conjunto A podemos plantear lo siguiente:

$$x<2\rightarrow x<5\equiv x\geq 2 \ \vee \ x<5$$

De esto último tenemos que $x\in\mathbb{R}$; luego el conjunto A viene dado por $x\in\mathbb{R}-\langle -3;1\rangle$, es decir:

$$A=\langle -\infty;-3]\cup[1;\infty\rangle \quad ....(1)$$

En el conjunto B:

$$x+2\notin A \longleftrightarrow x+2\in\langle -3;1\rangle$$

$$-3<x+2<1\longleftrightarrow -5<x<-1 \quad ...(2)$$

Con (1) y (2) apreciamos que los elementos del conjunto B son $x\in\langle -5;-3]$

$$B=\langle -5;-3]=\langle m;n]$$

De donde tenemos:

$$m=-5 \ \text{ y } \ n=-3$$

$\therefore$ **m – n = –2**

Clave: A

PROBLEMA 52

Sean los conjuntos:

$A=\langle -8;4\rangle\cup\{5;7\}$

$B=\{x\in A / x<2\rightarrow x>5\}$

Si $C=\{3-x / x\in \mathbf{B}\wedge x\in\mathbb{Z}\}$, entonces el n(C) es :

A) 6 B) 10 C) 4
D) 2 E) 7

Resolución:

Redefiniendo al conjunto B según:

$p\rightarrow q\equiv\sim p\vee q$, tenemos:

$B=\{x\in\langle -8;4\rangle\cup\{5;7\}/ x\geq 2\vee x>5\}$

$B=\{x\in\langle -8;4\rangle\cup\{5;7\}/ x\geq 2\}$

De donde tenemos:

$$B=[2;4\rangle\cup\{5;7\}$$

Veamos al conjunto C:

$$C=\{3-x/ x\in\mathbf{B}\wedge x\in\mathbb{Z}\}$$

$$C=\{3-x / x=2;3;5;7\}$$

De donde obtenemos:

$$C=\{1;0;-2;-4\}$$

$\therefore$ **n(C) = 4**

Clave: C

PROBLEMA 53

En los reales se define la operación "Δ" mediante: $a\Delta b = a + b + 7ab$. Con respecto al operador "Δ" determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

P: su elemento neutro es cero

q: cumple la propiedad conmutativa

r : si $a\Delta 2 = 47$, entonces $a = 3$

A) VVV B) VVF C) VFV

D) FVV E) FFF

Resolución:

$\forall\, a, b \in \mathbb{R}: \qquad a\Delta b = a + b + 7ab$

I. Si "e" es el elemento neutro, entonces se verifica lo siguiente:

$$a\Delta e = a \quad \longleftrightarrow \quad a + e + 7ae = a$$

$$e + 7ae = 0 \quad \longleftrightarrow \quad e(1 + 7a) = 0$$

De donde tenemos que: $e = 0 \;;\; \forall\, a \in \mathbb{R}$

Por tanto cero = 0 es el elemento neutro, luego la proposición P es verdadera (V)

II. Por condición:

$$\left.\begin{array}{l} a\Delta b = a + b + 7ab \\ b\Delta a = b + a + 7ba \\ b\Delta a = a + b + 7ab \end{array}\right\} a\Delta b = b\Delta a$$

Fácilmente podemos notar que "Δ" es conmutativa, luego la proposición q es verdadera (V).

III. Por condición:

$$a\Delta 2 = 47 \quad \longleftrightarrow \quad a + 2 + 14a = 47$$

$$15a = 45$$

$$a = 3$$

Es evidente que la proposición **r** es verdadera (V)

$\therefore$ **Valor de verdad = VVV**

Clave: A

PROBLEMA 54

Si $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}^+$ se cumple:

$\dfrac{bc}{a^2} + \dfrac{ac}{b^2} + \dfrac{ab}{c^2} \geq n$, entonces el máximo valor que puede asumir "n" es:

A) 8 B) 6 C) 5

D) 4 E) 3

Resolución:

Una rápida inspección permite observar que el producto de los términos:

$\dfrac{bc}{a^2}$; $\dfrac{ac}{b^2}$ y $\dfrac{ab}{c^2}$ es igual a la unidad, luego es conveniente plantear la propiedad: MA ≥ MG

con lo cual tenemos:

$$\frac{\dfrac{bc}{a^2} + \dfrac{ac}{b^2} + \dfrac{ab}{c^2}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{bc}{a^2} \cdot \frac{ac}{b^2} \cdot \frac{ab}{c^2}}$$

$$\frac{\dfrac{bc}{a^2} + \dfrac{ac}{b^2} + \dfrac{ab}{c^2}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2c^2}} = \sqrt[3]{1} = 1$$

$$\frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ab}{c^2} \geq 3$$

De donde resulta evidente que: $n \leq 3$

$$\therefore \quad \mathbf{n_{máx} = 3}$$

Clave: E

PROBLEMA 55

Sobre el conjunto $A = \{1 ; 2 ; 3 ; 6\}$ se define la operación $*$:

$$a*b = MCD(a, b) ; \forall a, b \in \mathbf{A}$$

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

p: la operación es conmutativa

q: la operación es asociativa

r: el elemento neutro es 6

A) VVV B) VFV C) VFF

D) FFF E) FVV

Resolución:

Sobre el conjunto:

$$A = \{1; 2; 3; 6\}; \forall a, b \in \mathbf{A}:$$

$$a*b = MCD(a, b)$$

I. Por condición:

$$\left.\begin{array}{l} a*b = MCD(a, b) \\ b*a = MCD(b, a) \end{array}\right\} \text{son iguales}$$

Es evidente que la operación $*$ es conmutativa, luego la proposición p es verdadera (V)

II. Observa que $\forall$ a, b, c $\in$ **A** se verifica:

$$MCD(MCD(a, b), C) = MCD(a, MCD(b, c))$$

Con lo cual: $(a*b) * c = a*(b*c)$

De donde es evidente que la operación $*$ es asociativa, luego la proposición q es verdadera (V)

III. Siendo "e" el neutro, se cumple que:

$$\forall a \in \mathbf{A} : a*e = MCD(a, e) = a$$

De donde podemos notar que "a" es un divisor "e" ; $\forall a \in \mathbf{A}$

Por tanto e = 6, lo cual garantiza que la proposición **r** es verdadera (V)

$\therefore$ **Valor de verdad = VVV**

Clave: A

PROBLEMA 56

Si la desigualdad: $\dfrac{a^2+a+1}{a^2+1} \le \dfrac{k}{2}$; se cumple $\forall a \in \mathbb{R}$, entonces el mínimo valor que puede admitir "k" es:

A) 5 B) 4 C) 3

D) 2 E) 1

Resolución:

La desigualdad propuesta es:

$$2a^2 + 2a + 2 \le ka^2 + k \quad ; \forall a \in \mathbb{R}$$

$$(2-k)a^2 + 2a + (2-k) \le 0 \quad ; \forall a \in \mathbb{R}$$

Por propiedad se cumple:

$$2-k < 0 \ \wedge \ (2)^2 - 4(2-k)^2 \le 0$$

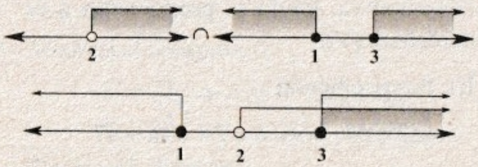
$$k-2 > 0 \ \wedge \ 4 - 4(2-k)^2 \le 0$$

$$k-2 > 0 \ \wedge \ 1 - (2-k)^2 \le 0$$

$$k-2 > 0 \ \wedge \ (3-k)(-1+k) \le 0$$

$$k-2 > 0 \ \wedge \ (k-3)(k-1) \ge 0$$

En la recta real tenemos:



De donde es evidente que: $k \ge 3$

$$\therefore \quad \mathbf{k_{mín} = 3}$$

Clave: C

PROBLEMA 57

Si $a < b < 0$. Resolver: $\dfrac{2ax+3b}{2bx+3a} < 1$

A) $\langle -\dfrac{3a}{2b}\ ;\ \dfrac{3}{2}\rangle$ B) $\langle -\infty\ ;\ \dfrac{3a}{b}\rangle$

C) $\langle \dfrac{3}{2}\ ;\ \infty\rangle$ D) $\langle 0\ ;\ \infty\rangle$

E) $\langle -\dfrac{3b}{2a}\ ;\ 0\rangle$

Resolución:

La inecuación dada es : $\dfrac{2ax+3b}{2bx+3a} - 1 < 0$

Transformando tenemos:

$$\frac{2ax-2bx-3a+3b}{2bx+3a} < 0$$

$$\frac{2x(a-b)-3(a-b)}{2bx+3a} < 0$$

$$\frac{(a-b)(2x-3)}{2bx+3a} < 0$$

Por condición $a - b < 0$: $\dfrac{2x-3}{2bx+3a} > 0$

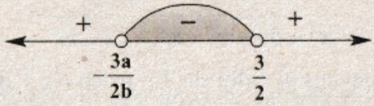
Por ser $b < 0 \rightarrow 2b < 0$: $\dfrac{2x-3}{-2bx-3a} < 0$

Por puntos de corte:

$$2x-3=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{3}{2}$$

$$-2bx-3a=0 \quad\rightarrow\quad x=-\frac{3a}{2b}$$

En la recta real tenemos:



$$\therefore\ \text{C.S.} = \langle -\frac{3a}{2b}\ ;\ \frac{3}{2}\rangle$$

Clave: A

PROBLEMA 58

Si M es el conjunto solución de la inecuación:

$$2x^2 - x - 3 < x^2 - 1 < 3x - 1$$

Entonces el conjunto M es:

A) $\langle -1\ ;\ 2\rangle$ B) $\langle -1\ ;\ 3\rangle$ C) $\langle -2\ ;\ 2\rangle$

D) $\langle 0\ ;\ 2\rangle$ E) $\mathbb{R}$

Resolución:

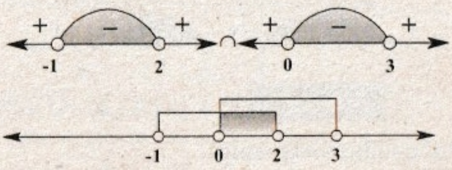
La inecuación dada es:

$$2x^2 - x - 3 < x^2 - 1 \ \wedge\ x^2 - 1 < 3x - 1$$

$$x^2 - x - 2 < 0 \ \wedge\ x^2 - 3x < 0$$

$$(x-2)(x+1) < 0 \ \wedge\ x(x-3) < 0$$

En la recta real:



$$\therefore\quad \mathbf{M = C.S. = \langle 0\ ;\ 2\rangle}$$

Clave: D

PROBLEMA 59

Si $[a; b\rangle \cup \langle c\ ;\ d\rangle$ es el conjunto solución de la inecuación

$$\frac{x-1}{x^2-5x+6} \geq \frac{x-2}{x^2-7x+12}$$

Entoncces el valor de T = a + b + c + d es:

A) 2 B) 5 C) 6

D) 9 E) 10

Resolución:

La inecuación dada es:

$$\frac{x-1}{x^2-5x+6} - \frac{x-2}{x^2-7x+12} \geq 0$$

Efectuando operaciones:

$$\frac{x-1}{(x-2)(x-3)} - \frac{x-2}{(x-3)(x-4)} \geq 0$$

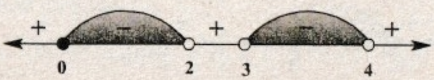
$$\frac{(x-1)(x-4)-(x-2)(x-2)}{(x-2)(x-3)(x-4)} \geq 0$$

$$\frac{-x}{(x-2)(x-3)(x-4)} \geq 0$$

Multiplicando por -1:

$$\frac{x}{(x-2)(x-3)(x-4)} \leq 0$$

En la recta real :



$$C.S. = [0\,;2\rangle \cup \langle 3\,;4\rangle$$

Por condición tenemos:

$$a = 0\,;\, b = 2\,;\, c = 3\,;\, d = 4$$

$\therefore$ **T = 9**

Clave: D

PROBLEMA 60

Si $\langle -\infty\,; -1\rangle$ es el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\frac{x}{x-a+b} > \frac{(a-b)(x+1)-1}{(a-b)x-1}$$

Entonces la relación correcta que debe existir entre "a" y "b" es:

A) 3a = b B) 2b = a C) a = b − 1

D) a = b + 2 E) a = b + 5

Resolución:

Sumando −1 a cada miembro:

$$\frac{a-b}{x-a+b} > \frac{a-b}{(a-b)x-1}$$

$$\frac{a-b}{x-(a-b)} - \frac{a-b}{(a-b)x-1} > 0$$

Haciendo m = a − b, tenemos:

$$\frac{m}{x-m} - \frac{m}{mx-1} > 0$$

$$m\cdot\left[\frac{mx-1-x+m}{(x-m)(mx-1)}\right] > 0$$

$$m\cdot\left[\frac{x(m-1)+(m-1)}{(x-m)(mx-1)}\right] > 0$$

$$\frac{m(m-1)(x+1)}{(x-m)(mx-1)} > 0$$

Una rápida inspección permite observar que cuando m = −1 la inecuación se reduce a:

$$\frac{1}{x+1} < 0$$

De donde es evidente que:

$$C.S. = \langle -\infty\,; -1\rangle$$

Por tanto es necesario que:

$$m = a - b = -1$$

$\therefore$ **a = b − 1**

Clave: C

PROBLEMA 61

Si $\forall x \in \mathbb{R}$ se cumple que: $-3 < \dfrac{x^2 - kx + 1}{x^2 + x + 1} < 3$. Entonces el conjunto de valores reales que admite k es:

A) $\langle -5\ ;\ 11\rangle$ B) $\langle 3\ ;\ 64\rangle$ C) $\langle 0;\ 11\rangle$ D) $\langle -5\ ;\ 3\rangle$ E) $\langle -5\ ;\ 1\rangle$

Resolución:

Una rápida inspección permite apreciar que $x^2 + x + 1 > 0\ ;\ \forall x \in \mathbb{R}$, luego la inecuación dada se puede reescribir así:

$$-3(x^2 + x + 1) < x^2 - kx + 1 < 3(x^2 + x + 1)\ ;\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$-3x^2 - 3x - 3 < x^2 - kx + 1 < 3x^2 + 3x + 3\ ;\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x^2 - kx + 1 > -3x^2 - 3x - 3 \wedge 3x^2 + 3x + 3 > x^2 - kx + 1\ ;\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$4x^2 + (3 - k)x + 4 > 0 \quad \wedge \quad 2x^2 + (k + 3)x + 2 > 0 \quad ;\ \forall x \in \mathbb{R}$$

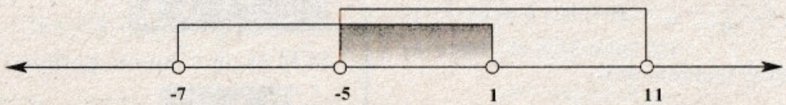
Por propiedad: $(3 - k)^2 - 4(4)(4) < 0 \quad \wedge \quad (k + 3)^2 - 4(2)(2) < 0$

$$(3 - k)^2 - 8^2 < 0 \quad \wedge \quad (k + 3)^2 - 4^2 < 0$$

$$(11 - k)(-5 - k) < 0 \quad \wedge \quad (k + 7)(k - 1) < 0$$

$$(k - 11)(k + 5) < 0 \quad \wedge \quad (k + 7)(k - 1) < 0$$

En la recta real:



$$\therefore \quad k \in \langle -5\ ;\ 1\rangle$$

Clave: E

PROBLEMA 62

Si A es el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 6x - 2 + \sqrt{1 - x}} < x + 1$$

Entonces el conjunto A es:

A) $\langle 0\ ;\ 1]$ B) $\langle -\infty\ ;\ \frac{8}{9}\rangle$ C) $\langle -\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\rangle$ D) $\langle -\infty\ ;\ -\frac{8}{9}\rangle$ E) $\langle -\infty\ ;\ 0\rangle$

Resolución:

La inecuación dada es :

$$\sqrt[3]{x^3+3x^2+6x-2+\sqrt{1-x}}<x+1$$

Elevando al cubo tenemos:

$$x^3+3x^2+6x-2+\sqrt{1-x}<x^3+3x^2+3x+1$$

$$\sqrt{1-x}<3-3x$$

$$\sqrt{1-x}<3(1-x)$$

Por existencia en $\mathbb{R}$, $1-x>0$:

$$\sqrt{1-x}<3\sqrt{1-x}^2$$

Simplificando al radical:

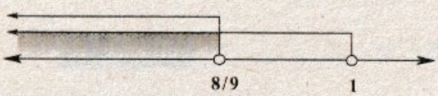
$$1<3\sqrt{1-x} \quad \wedge \quad 1-x>0$$

$$\frac{1}{3}<\sqrt{1-x} \quad \wedge \quad 1-x>0$$

$$\frac{1}{9}<1-x \quad \wedge \quad 1-x>0$$

$$x<\frac{8}{9} \quad \wedge \quad x<1$$

En la recta real tenemos:



$$\therefore \quad \mathbf{A=C.S.}=\langle-\infty\ ;\ \frac{8}{9}\rangle$$

Clave: B

PROBLEMA 63

Si T es el conjunto solución de la inecuación:

$$\sqrt[3]{x-1}>\sqrt{x-1}$$

Entonces el conjunto T es:

A) $\langle-\infty\ ;2\rangle$ B) $\langle 1\ ;2\rangle$

C) $\langle 0\ ;2\rangle-\{1\}$ D) $\langle-1\ ;1\rangle$

E) $\mathbb{R}$

Resolución:

La inecuación dada es : $\sqrt[3]{x-1}>\sqrt{x-1}$

Eliminando signo radical:

$$(\sqrt[3]{x-1})^6>(\sqrt{x-1})^6 \quad \wedge \quad x-1>0$$

$$(x-1)^2>(x-1)^3 \quad \wedge \quad x-1>0$$

Simplificando tenemos:

$$1>x-1 \quad \wedge \quad x-1>0$$

$$-x>-2 \quad \wedge \quad x-1>0$$

$$x<2 \quad \wedge \quad x>1$$

De la intersección resulta: $1<x<2$

$$\therefore \quad \mathbf{T=C.S.}=\langle\mathbf{1\ ;2}\rangle$$

Clave: B

PROBLEMA 64

Si M es un conjunto definido por:

$$M=\{x\in\mathbb{R}\ /\ \sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}<\sqrt{3x}\}$$

Entonces el conjunto M es:

A) $\mathbb{R}^+$ B) $[1\ ;\sqrt{3}\rangle$ C) $[2\ ;2\sqrt{3}\rangle$

D) $[1\ ;\frac{2}{3}\sqrt{3}\rangle$ E) $\langle 0\ ;1\rangle$

Resolución:

Por existencia en $\mathbb{R}$:

$$x+1\geq 0 \quad \wedge \quad x-1\geq 0 \quad \wedge \quad 3x\geq 0$$

$$x\geq -1 \quad \wedge \quad x\geq 1 \quad \wedge \quad x\geq 0$$

Al intersectar tenemos: $x \geq 1$ ...(1)

La inecuación dada es:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}<\sqrt{3x}$$

Elevando al cuadrado:

$$2x+2\sqrt{x^2-1}<3x$$

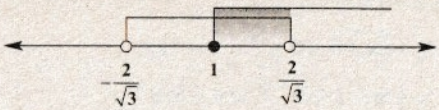
$$2\sqrt{x^2-1}<x$$

$$4(x^2-1)<x^2$$

$$3x^2-4<0$$

$$(\sqrt{3}x+2)(\sqrt{3}x-2)<0 \quad ...(2)$$

Intersectando (1) y (2):



Observa que: $\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$$\therefore \quad \mathbf{M=CS=[1\,;\,\frac{2\sqrt{3}}{3}\rangle}$$

Clave: D

PROBLEMA 65

Si S = [a ; b], es el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\sqrt{2-x}+\sqrt{x-1}+4-x\geq 0$$

Entonces en valor de: $T=(b-a)^b$ es:

A) 1 B) 4 C) 9

D) 16 E) 25

Resolución:

Por existencia en $\mathbb{R}$:

$$2-x\geq 0 \quad \wedge \quad x-1\geq 0$$

$$-x\geq -2 \quad \wedge \quad x\geq 1$$

$$x\leq 2 \quad \wedge \quad x\geq 1$$

De la intersección: $1\leq x\leq 2$ ...(1)

La inecuación dada es:

$$\sqrt{2-x}+\sqrt{x-1}\geq x-4 \quad ...(2)$$

Una rápida inspección permite apreciar que $x-4$ es negativo en el intervalo citado en (1), luego la inecuación (2) se verifica para todo x citado en (1). Por tanto:

$$S=[a\,;\,b]=[1\,;\,2]$$

De donde es evidente que:

$a=1$ y $b=2$

$\therefore$ $\mathbf{T=1}$

Clave: A

PROBLEMA 66

Si $T=[a\,;\,b]\cup[c\,;\,d\rangle$ es el conjunto solución de la inecuación:

$$\sqrt[6]{\frac{3-\sqrt{x^2-3x+5}}{\sqrt{x+3}-5}}\geq 0$$

Entonces el valor de $M=a+b+c+d$ es:

A) 6 B) 12 C) 18

D) 22 E) 35

Resolución:

Por existencia en $\mathbb{R}$:

$$\frac{3-\sqrt{x^2-3x+5}}{\sqrt{x+3}-5}\geq 0$$

1° caso:

$$3-\sqrt{x^2-3x+5}\geq 0 \quad \wedge \quad \sqrt{x+3}-5>0$$

$$\sqrt{x^2-3x+5}\leq 3 \quad \wedge \quad \sqrt{x+3}>5$$

$$(x^2-3x+5\geq 0 \ \wedge \ x^2-3x+5\leq 9) \ \wedge \ (x+3\geq 0 \ \wedge \ x+3>25)$$

$$(\underbrace{x^2-3x+5\geq 0}_{\forall x\in\mathbb{R}} \ \wedge \ x^2-3x-4\leq 0) \ \wedge \ (x+3\geq 0 \ \wedge \ x-22>0)$$

$$(x^2-3x-4\leq 0) \quad \wedge \quad (x-22>0)$$

$$(x-4)(x+1)\leq 0 \quad \wedge \quad x-22>0$$

De la intersección: $x\in\phi$, con lo cual podemos afirmar que el conjunto solución de la inecuación dada lo obtendremos en el segundo caso.

2° caso: $$3-\sqrt{x^2-3x+5}\leq 0 \quad \wedge \quad \sqrt{x+3}-5<0$$

$$\sqrt{x^2-3x+5}\geq 3 \quad \wedge \quad \sqrt{x+3}<5$$

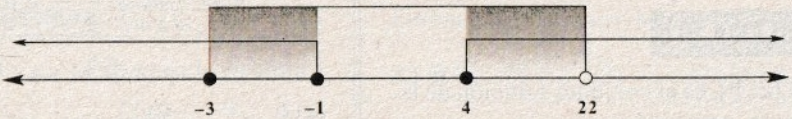
$$(\underbrace{x^2-3x+5\geq 0}_{\forall x\in\mathbb{R}} \ \wedge \ x^2-3x+5\geq 9) \quad \wedge \quad (x+3\geq 0 \ \wedge \ x+3<25)$$

$$(x^2-3x+5\geq 9) \quad \wedge \quad (x+3\geq 0 \ \wedge \ x+3<25)$$

$$x^2-3x-4\geq 0 \quad \wedge \quad (x+3\geq 0 \ \wedge \ x-22<0)$$

$$(x-4)(x+1)\geq 0 \quad \wedge \quad (-3\leq x<22)$$

En la recta real:



$$CS=[-3\,;-1]\ \cup\ [4;22\rangle$$

Por condición: a = –3 ; b = –1 ; c = 4 y d = 22

$$M=-3-1+4+22$$

$$\therefore \quad \mathbf{M=22}$$

Clave: D

PROBLEMA 67

Resolver: $\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{x^2-x-2}-2}{2-\sqrt{x+4}}} \geq \sqrt[3]{x-10}$

A) $[-5;-2]\cup[2;3]$ B) $\langle -4;-2\rangle \cup \langle 2;3\rangle$ C) $[-4;2]\cup[2;3]$
D) $[-4;2]\cup\langle 3;4\rangle$ E) $[-4;-2]\cup\langle -1;3\rangle$

Resolución:

Por existencia en $\mathbb{R}$: $\dfrac{\sqrt{x^2-x-2}-2}{2-\sqrt{x+4}} \geq 0$

1° caso: $\sqrt{x^2-x-2}-2 \geq 0 \quad \wedge \quad 2-\sqrt{x+4} > 0$

$$\sqrt{x^2-x-2} \geq 2 \quad \wedge \quad \sqrt{x+4} < 2$$

$$(x^2-x-2 \geq 0 \ \wedge \ x^2-x-2 \geq 4) \quad \wedge \quad (x+4 \geq 0 \ \wedge \ x+4 < 4)$$

$$(x^2-x-2 \geq 0 \ \wedge \ x^2-x-6 \geq 0) \quad \wedge \quad (x+4 \geq 0 \ \wedge \ x < 0)$$

$$[(x-2)(x+1) \geq 0 \ \wedge \ (x-3)(x+2) \geq 0] \quad \wedge \quad (x+4 \geq 0 \ \wedge \ x < 0)$$

$$(x \leq -2 \ \vee \ x \geq 3) \quad \wedge \quad (-4 \leq x < 0)$$

De la intersección: $-4 \leq x \leq -2$ .....(1)

2° caso: $\sqrt{x^2-x-2}-2 \leq 0 \quad \wedge \quad 2-\sqrt{x+4} < 0$

$$\sqrt{x^2-x-2} \leq 2 \quad \wedge \quad \sqrt{x+4} > 2$$

$$(x^2-x-2 \geq 0 \ \wedge \ x^2-x-2 \leq 4) \quad \wedge \quad (x+4 \geq 0 \ \wedge \ x+4 > 4)$$

$$(x^2-x-2 \geq 0 \wedge \ x^2-x-6 \leq 0) \quad \wedge \quad (x+4 \geq 0 \ \wedge \ x > 0)$$

$$[(x-2)(x+1) \geq 0 \ \wedge \ (x-3)(x+2) \leq 0] \quad \wedge \quad (x+4 \geq 0 \ \wedge \ x > 0)$$

$$(-2 \leq x \leq -1 \ \vee \ 2 \leq x \leq 3) \quad \wedge \quad (x > 0)$$

De la intersección: $2 \leq x \leq 3$ .....(2)

De (1) y (2) tenemos: $-4 \leq x \leq -2 \quad \vee \quad 2 \leq x \leq 3$ .....(3)

Sumando -10 tenemos: $-14 \leq x-10 \leq -12 \quad \vee \quad -8 \leq x-10 \leq -7$

Fácilmente podemos apreciar que a partir de la relación (3), $\sqrt[3]{x-10}$ es negativo con lo cual podemos afirmar que (3) es la solución de la inecuación dada.

$$\therefore \quad \textbf{C.S.} = [-4\,;-2\,] \cup [2\,;3]$$

Clave: C

PROBLEMA 68

Si $\langle\, a\,;\,b] \cup \{c\}$ es el conjunto solución de la inecuación:

$$\left(\frac{\sqrt{8-x^2}}{x}-1\right)\left(\frac{\sqrt{16-x^2}}{x}-1\right)\left(\frac{\sqrt{50-x^2}}{x}-1\right)\geq 0$$

Calcular: a + bc

A) 0 B) 1 C) $4\sqrt{2}$

D) $8\sqrt{2}$ E) $16\sqrt{2}$

Resolución:

Una rápida inspección permiter observar que $x>0$, pues de no ser así, la expresión del primer miembro sería negativa y no cumpliría la desigualdad planteada.

Por existencia en $\mathbb{R}$:

$$8-x^2\geq 0 \;\wedge\; 16-x^2\geq 0 \;\wedge\; 50-x^2\geq 0$$

$$x^2-8\leq 0 \;\wedge\; x^2-16\leq 0 \;\wedge\; x^2-50\leq 0$$

$$-2\sqrt{2}\leq x\leq 2\sqrt{2} \wedge -4\leq x\leq 4 \wedge -5\sqrt{2}\leq x\leq 5\sqrt{2}$$

Como $x>0$, tenemos: $0<x\leq 2\sqrt{2}$ .... (1)

La inecuación dada es:

$$\left(\sqrt{\frac{8-x^2}{x^2}}-1\right)\left(\sqrt{\frac{16-x^2}{x^2}}-1\right)\left(\sqrt{\frac{50-x^2}{x^2}}-1\right)\geq 0$$

$$\left(\sqrt{\frac{8}{x^2}-1}-1\right)\left(\sqrt{\frac{16}{x^2}-1}-1\right)\left(\sqrt{\frac{50}{x^2}-1}-1\right)\geq 0$$

Con el auxilio de (1):

$$0<x\leq 2\sqrt{2} \;\rightarrow\; 0<x^2\leq 8$$

Al dividir por 8:

$$0<\frac{x^2}{8}\leq 1 \;\longleftrightarrow\; 1\leq\frac{8}{x^2}<\infty$$

Al dividir por 16:

$$0<\frac{x^2}{16}\leq\frac{1}{2} \;\longleftrightarrow\; 2\leq\frac{16}{x^2}<\infty$$

$$1\leq\frac{16}{x^2}-1<\infty$$

$$1\leq\sqrt{\frac{16}{x^2}-1}<\infty \qquad .... (2)$$

Al dividir por 50:

$$0<\frac{x^2}{50}\leq\frac{4}{25} \;\longleftrightarrow\; \frac{25}{4}\leq\frac{50}{x^2}<\infty$$

$$\frac{21}{4}\leq\frac{50}{x^2}-1<\infty$$

$$\sqrt{\frac{21}{4}}\leq\sqrt{\frac{50}{x^2}-1}<\infty \qquad .... (3)$$

Con (2) y (3) podemos notar que los dos últimos factores de la inecuación propuesta son no negativos, por tanto dicha inecuación se reduce a:

$$\sqrt{\frac{8}{x^2}-1}-1\geq 0$$

$$\sqrt{\frac{8}{x^2}-1}\geq 1$$

$$\frac{8}{x^2} \geq 2$$

$$x^2 \leq 4$$

$$-2 \leq x \leq 2 \qquad ....(4)$$

De (1) y (4): $0 < x \leq 2 \ \vee \ x = 2\sqrt{2}$

$$CS = \langle 0\,;2] \cup \{\,2\sqrt{2}\,\}$$

$$\therefore\ \mathbf{a + bc = 4\sqrt{2}}$$

Clave: C

PROBLEMA 69

Dados los conjuntos.

$$A = \{x \in \mathbb{R}\ /\ \sqrt{x - \sqrt{2x+3}} < 1\,\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R}\ /\ \sqrt{\sqrt{x+10} - \sqrt{3-x}} > -5\,\}$$

Determine: $A \cup B$

A) $\langle -\infty\ ;\ -\frac{7}{2}\rangle$ B) $[\,2+\sqrt{6}\ ;\ \infty\,\rangle$

C) $[\,-\frac{7}{2}\ ;\ \infty\,\rangle$ D) $\langle -\infty\ ;\ 2+\sqrt{6}\,\rangle$

E) $[-\frac{7}{2}\ ;\ 2+\sqrt{6}\,\rangle$

Resolución:

Para el conjunto A: $\sqrt{x - \sqrt{2x+3}} < 1$

$$x - \sqrt{2x+3} \geq 0 \ \wedge \ x - \sqrt{2x+3} < 1$$

$$\underbrace{\sqrt{2x+3} \leq x}_{(1)} \ \wedge \ \underbrace{\sqrt{2x+3} > x-1}_{(2)}$$

$(1): 2x+3 \geq 0 \ \wedge \ x > 0 \ \wedge \ 2x+3 \leq x^2$

$$2x+3 \geq 0 \ \wedge \ x > 0 \ \wedge \ x^2 - 2x - 3 \geq 0$$

$$2x+3 \geq 0 \ \wedge \ x > 0 \ \wedge \ (x-3)(x+1) \geq 0$$

De la intersección: $x \geq 3 \qquad ..... (3)$

$(2): 2x+3 > (x-1)^2$

$$2x+3 > x^2 - 2x + 1 \longleftrightarrow x^2 - 4x - 2 < 0$$

$$(x-2)^2 - \sqrt{6}^2 < 0 \longleftrightarrow (x-2+\sqrt{6})(x-2-\sqrt{6}) < 0$$

De donde obtenemos:

$$2 - \sqrt{6} < x < 2 + \sqrt{6} \qquad ..... (4)$$

De (3) y (4) tenemos:

$$3 \leq x < 2 + \sqrt{6}$$

$$A = [3\,;2+\sqrt{6}\,\rangle$$

Para el conjunto B:

$$\sqrt{\sqrt{x+10} - \sqrt{3-x}} > -5$$

Es evidente que:

$$\sqrt{x+10} - \sqrt{3-x} \geq 0$$

$$\sqrt{x+10} \geq \sqrt{3-x}$$

$$x+10 \geq 0 \ \wedge \ 3-x \geq 0 \ \wedge \ x+10 \geq 3-x$$

$$x+10 \geq 0 \ \wedge \ x-3 \leq 0 \ \wedge \ 2x \geq -7$$

$$x+10 \geq 0 \ \wedge \ x-3 \leq 0 \ \wedge \ x \geq -\frac{7}{2}$$

De la intersección: $-\frac{7}{2} \leq x \leq 3$

$$B = \left[-\frac{7}{2}\ ;\ 3\right]$$

$$\therefore \qquad \mathbf{A \cup B = \left[-\frac{7}{2}\ ;\ 2+\sqrt{6}\right]}$$

Clave: E

PROBLEMA 70

Dados los conjuntos: $A=\left\{x\in\mathbb{R}\Big/\dfrac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x}<1\right\}$

$$B=\left\{x\in\mathbb{R}\Big/\frac{(2x^2+3)\sqrt{x+3}}{(x-2)(2x+3)(x+2)^2}>\frac{(2x-x^2+3)\sqrt{x+3}}{(2x^2-x-6)(x+2)^2}\right\}$$

Si $\mathbb{Z}$ es el conjunto de los números enteros . Determine el cardinal del conjunto $A\cap B\cap\mathbb{Z}$.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Resolución:

Para el conjunto A: $\dfrac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x}<1$

i) Si $x>0$: $\sqrt{24-2x-x^2}<x$

$$24-2x-x^2\geq 0 \quad\wedge\quad x>0 \quad\wedge\quad 24-2x-x^2<x^2$$

$$x^2+2x-24\leq 0 \quad\wedge\quad x>0 \quad\wedge\quad x^2+x-12>0$$

$$(x+6)(x-4)\leq 0 \quad\wedge\quad x>0 \quad\wedge\quad (x+4)(x-3)>0$$

De la intersección: $3<x\leq 4$

ii) Si $x<0$: $\sqrt{24-2x-x^2}>x$

$$24-2x-x^2\geq 0 \quad\longleftrightarrow\quad x^2+2x-24\leq 0$$

$$(x+6)(x-4)\leq 0 \quad\longleftrightarrow\quad -6\leq x\leq 4$$

Como $x<0$, luego: $-6\leq x<0$

Ahora notamos que: $A=[-6\,;0\rangle\cup\langle 3\,;4]$

Para el conjunto B: $\dfrac{(2x^2+3)\sqrt{x+3}}{(x-2)(2x+3)(x+2)^2}-\dfrac{(2x-x^2+3)\sqrt{x+3}}{(x-2)(2x+3)(x+2)^2}>0$

$$\frac{(3x^2-2x)\sqrt{x+3}}{(x-2)(2x+3)(x+2)^2}>0$$

$$\frac{x(3x-2)\sqrt{x+3}}{(x-2)(2x+3)(x+2)^2}>0$$

Siendo $x\neq -2\ ;\ x>-3$:

$$\frac{x(3x-2)}{(x-2)(2x+3)}>0$$

$$B=\langle -3;-2\rangle\cup\langle -2\ ;\ -\frac{3}{2}\rangle\cup\langle 0\ ;\ \frac{2}{3}\rangle\cup\langle 2;\infty\rangle$$

Finalmente tenemos: $A\cap B\cap \mathbb{Z}=\{4\}$

$\therefore$ **Cardinal de $(A\cap B\cap \mathbb{Z})=1$**

Clave: B

PROBLEMA 71

Si $\langle a\ ;\ b\rangle \cup \langle c\ ;\ \infty\rangle$ es el conjunto solución de la inecuación

$$\frac{(x^2-9)\sqrt{x^2+2x+3}}{(x^2+1)(x+2)\sqrt{2x^2-7x+6}}>0$$

Calcular: abc

A) −6 B) 1 C) 5

D) 14 E) 18

Resolución:

Una rápida inspección permite observar que las expresiones x^2+1 y x^2+2x+3 son positivos para todo valor real de x, luego la inecuación se reduce a:

$$\frac{x^2-9}{(x+2)\sqrt{2x^2-7x+6}}>0$$

Asimismo tenemos:

$$\frac{(x+3)(x-3)}{x+2}>0\ \wedge\ 2x^2-7x+6>0$$

$$\frac{(x+3)(x-3)}{x+2}>0\ \wedge\ (2x-3)(x-2)>0$$

De la intersección:

$$x\in\langle -2\ ;\ -3\rangle\cup\langle 3\ ;\ \infty\rangle$$

$$CS=\langle -2\ ;\ -3\rangle\cup\langle 3\ ;\ \infty\rangle$$

Por condición tenemos:

$a=-2\ ;\ b=-3\ \wedge\ c=3$

$\therefore$ **abc = 18**

Clave: E

PROBLEMA 72

En los reales definimos la operación $*$ mediante $a*b=a+b+1$. Con respecto al operador $*$ determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

p: la operación $*$ es conmutativa

q: la operación $*$ es asociativa

r: la operación tiene elemento neutro

A) VVV B) FFF C) FVF

D) FVV E) VVF

Resolución:

Se tiene $\forall$ a, b, $\in \mathbb{R}$: $a*b=a+b+1$

p: $a*b=a+b+1$
$\quad b*a=b+a+1$ → son iguales: $a*b=b*a$

$\Rightarrow *$ es conmutativa

q: $(a*b)*c=(a*b)+c+1$

$= a + b + 1 + c + 1$

$= a + b + c + 2$

$a*(b*c) = a + (b * c) + 1$

$= a + b + c + 1 + 1$

$= a + b + c + 2$

Observa que: $(a*b)*c = a*(b*c)$

$\Rightarrow *$ es asociativa

r: Sea $e \in \mathbb{R}$ tal que : $a*e = a$

$a + e + 1 = a$

$e = -1$

$\Rightarrow *$ tiene neutro $e = -1$

$\therefore$ **Valor de verdad = VVV**

Clave: A

PROBLEMA 73

En $\mathbb{R}^+$ se define la operación:

$$a * b = \text{máx}\{a ; b\}$$

En $\mathbb{R}^-$ se define la operación:

$$c \ \psi \ d = \text{mín}\{c ; d\}$$

Simplificar:

$$K = \frac{\left[\left(\frac{1}{2}\right)*(4)\right] - [(-4) \ \psi \ (-3)]}{(2)*[(4)*(2)]}$$

A) 3 B) 2 C) 1

D) 0 E) −1

Resolución:

Teniendo en cuenta las relaciones dadas para $*$ y ψ, tenemos:

$$K = \frac{[4]-[-4]}{(2)*[4]} = \frac{4+4}{4} = \frac{8}{4}$$

$\therefore$ $\mathbf{K = 2}$

Clave: B

PROBLEMA 74

Si a, b y c $\in \mathbb{R}+$ tal que: $a + b = 6 - c$, entonces la expresión $M = a^3 + b^3 + c^3$ verifica:

A) $M \geq 8$ B) $M \leq 6$ C) $M \leq 24$

D) $M \geq 120$ E) $M \geq 24$

Resolución:

Por condición $a, b \wedge c \in \mathbb{R}^+$: $a + b + c = 6$

Teniendo en cuenta la relación: $MP \geq MA$

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}} \geq \frac{a + b + c}{3}$$

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geq \frac{(a + b + c)^3}{27}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{(a + b + c)^3}{9}$$

Teniendo en cuenta la condición:

$$M \geq \frac{(6)^3}{9}$$

$\therefore$ $\mathbf{M \geq 24}$

Clave: E

PROBLEMA 75

Si $x > 0 \wedge a > b > 0$, entonces el intervalo de variación de la expresión: $\dfrac{ax + b}{bx + a}$ es :

A) $\langle b ; a\rangle$ B) $\langle a ; b\rangle$ C) $\langle \frac{b}{a} ; \frac{a}{b}\rangle$

D) $\langle -\frac{a}{b} ; -\frac{b}{a}\rangle$ E) $\langle 0 ; ab\rangle$

Resolución:

Teniendo en cuenta que a, b, c $\wedge$ d $\in \mathbb{R}^+$ se cumple la siguiente propiedad:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

En nuestro caso: $x > 0 \quad \wedge \quad a > b > 0$

$$ax > bx \quad \wedge \quad a > b$$

$$\frac{ax}{bx} > 1 \quad \wedge \quad 1 > \frac{b}{a}$$

Multiplicando: $\frac{ax}{bx} > \frac{b}{a} \quad \rightarrow \quad \frac{b}{a} < \frac{ax}{bx}$

Ahora por propiedad: $\frac{b}{a} < \frac{b+ax}{a+bx} < \frac{ax}{bx}$

$$\frac{b}{a} < \frac{ax+b}{bx+a} < \frac{a}{b}$$

$$\therefore \quad \frac{ax+b}{bx+a} \in \left\langle \frac{b}{a} ; \frac{a}{b} \right\rangle$$

Clave: C

PROBLEMA 76

Si **m** y **n** son enteros negativos, entonces el conjunto solución de la inecuación de primer grado en x:

$$\frac{mx-n^3}{n} + \frac{nx-m^3}{m} \geq 2(mn-x) \text{ es:}$$

A) $\langle -\infty ; m+n]$
B) $[mn ; \infty\rangle$
C) $[m+n ; \infty\rangle$
D) $\langle -\infty ; m-n]$
E) $[-mn ; \infty\rangle$

Resolución:

Por condición: $m < 0 \wedge n < 0 \rightarrow mn > 0$,

luego la inecuación dada es:

$$m(mx-n^3) + n(nx-m^3) \geq 2mn(mn-x)$$
$$m^2x + n^2x + 2mnx \geq mn^3 + m^3n + 2m^2n^2$$
$$(m^2+n^2+2mn)x \geq mn(n^2+m^2+2mn)$$
$$(m+n)^2x \geq mn(m+n)^2$$

Es evidente que $(m+n)^2 > 0$: $x \geq mn$

$$\therefore \quad \textbf{C.S.} = [mn ; \infty\rangle$$

Clave: B

PROBLEMA 77

Si $a > 1 > b > 0$, entonces el conjunto solución de la inecuación de primer grado en x:

$$\frac{x}{a+1} + \frac{x}{a-1} < \frac{2bx}{a^2-1} + \frac{a^2-b^2}{a+1} \text{ es:}$$

A) $\left[\frac{a+b}{2} ; \infty\right\rangle$

B) $\left\langle -\infty ; \frac{(a+b)(a-1)}{2}\right\rangle$

C) $\left\langle \frac{(a+b)(a-1)}{2} ; \infty \right\rangle$

D) $\langle -\infty ; 0\rangle$
E) $\left\langle \frac{1}{2}(a+b) ; \frac{1}{2}(a+1)\right\rangle$

Resolución:

La inecuación dada es:

$$\frac{2ax}{a^2-1} < \frac{2bx}{a^2-1} + \frac{a^2-b^2}{a+1}$$

$$\frac{2ax-2bx}{a^2-1} < \frac{a^2-b^2}{a+1}$$

$$\frac{2x(a-b)}{(a+1)(a-1)} < \frac{(a+b)(a-b)}{a+1}$$

Por condición: $a > 0$, luego $a + 1 > 1$, con lo cual tenemos:

$$\frac{2x(a-b)}{a-1} < (a+b)(a-b)$$

Por condición: $a > b$, luego $a - b > 0$, con lo cual tenemos:

$$\frac{2x}{a-1} < a+b$$

Asimismo como $a > 1$, luego $a - 1 > 0$, con lo cual tenemos:

$$2x < (a+b)(a-1)$$

$$x < \frac{1}{2}(a+b)(a-1)$$

$$\therefore \quad \textbf{C.S.} = \langle -\infty \; ; \; \frac{(a+b)(a-1)}{2} \rangle$$

Clave: B

PROBLEMA 78

En los reales definimos la operación : $a * b = a + b + 2$. Si A y B son dos conjuntos definidos según:

$A = \{x \in \mathbb{R} \;/\; [(x+3)*(x+2)] * 6 > 0\}$

$B = \{x \in \mathbf{A} / (x > 0) \longleftrightarrow (3x - 5 > 5x + 11)\}$

Entonces el conjunto B en intervalos es:

A) $\langle -\frac{15}{2} \; ; \; 0]$ B) $[-8 \; ; 0 \rangle$

C) $\langle -\frac{15}{2} \; ; \; \infty \rangle$ D) $[-8 \; ; \infty\rangle$

E) $\langle 0 \; ; \; \frac{15}{2} \rangle$

Resolución:

Se tiene $\forall a, b \in \mathbb{R} : a * b = a + b + 2$

Para el conjunto A:

$$[(x+3)*(x+2)*6 > 0]$$
$$(2x+7)*6 > 0$$
$$2x + 15 > 0$$

$$x > -\frac{15}{2}$$

De donde tenemos: $A = \langle -\frac{15}{2} \; ; \; \infty \rangle$

Para el conjunto B:

$$x > 0 \longleftrightarrow 3x - 5 > 5x + 11$$
$$x > 0 \longleftrightarrow x < -8$$

De la bicondicional:

$$(x > 0 \rightarrow x < -8) \;\wedge\; (x < -8 \rightarrow x > 0)$$
$$(x \leq 0 \vee x < -8) \;\wedge\; (x \geq -8 \vee x > 0)$$
$$x \leq 0 \;\wedge\; x \geq -8$$
$$-8 \leq x \leq 0$$

Ahora tenemos:

$$B = \{x \in A / -8 \leq x \leq 0\}$$

$$\therefore \quad \mathbf{B} = \langle -\frac{15}{2} \; ; \; 0]$$

Clave: A

PROBLEMA 79

La siguiente inecuación:

$2x - \frac{9}{x-3} > x - \frac{5}{x-3}$ se satisface para:

A) $-2 < x < 2 \;\vee\; x > 3$

B) $-1 < x < 3 \;\vee\; x > 4$

C) $-3 < x < 1 \;\vee\; 2 < x < 3$

D) $-\infty < x < 3$

E) $\langle -\infty\ ;\ \infty \rangle - \{3\}$

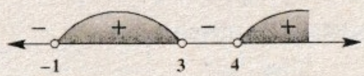
Resolución

La inecuación dada es: $x - \dfrac{4}{x-3} > 0$

$$\frac{x^2-3x-4}{x-3} > 0$$

$$\frac{(x-4)(x+1)}{x-3} > 0$$

En la recta real:



$\therefore$ **C.S.** $= \langle -1\ ;\ 3 \rangle \cup \langle 4\ ;\ \infty \rangle$

Clave: B

PROBLEMA 80

Dados los conjuntos:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \Big/ \frac{\sqrt{x+2}}{|x|} > 0 \right\}$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} \big/ \sqrt{x} > x \right\}$$

Determinar : $A \cup B$

A) $\langle 0\ ;\ 2 \rangle$ B) $\langle -1\ ;\ 1 \rangle$ C) B

D) $\langle 0\ ;\ 7 \rangle$ E) A

Resolución:

Para el conjunto A : $x + 2 > 0 \ \wedge\ x \neq 0$

De donde obtenemos:

$$A = \langle -2\ ;\ 0 \rangle \cup \langle 0\ ;\ \infty \rangle$$

Para el conjunto B: $\sqrt{x} > x$

$$x > 0 \ \wedge\ x > 0 \ \wedge\ x > x^2$$

$$x > 0 \ \wedge\ x^2 - x < 0$$

$$x > 0 \ \wedge\ x(x-1) < 0$$

De la intersección: $B = \langle 0\ ;\ 1 \rangle$

Finalmente tenemos:

$$A \cup B = \langle -2\ ;\ 0 \rangle \cup \langle 0\ ;\ \infty \rangle$$

$\therefore\ \mathbf{A \cup B = A}$

Clave: E

PROBLEMA 81

Dado el conjunto:

$A = \{x \in \mathbb{N} / \big|\, \big|\, |x^2+4| + 4x \,\big| - \big|\, |x^2+4| - 4x \,\big| \,\big| \geq 32\}$. ¿Cuál es su complemento?

A) $[-4\ ;\ 4]$ B) $\langle -\infty\ ;\ 4] \cup [4\ ;\ \infty \rangle$

C) $\langle -4\ ;\ 4 \rangle$ D) $[-4\ ;\ 4] \cap \mathbb{N}$

E) $\langle -4\ ;\ 4 \rangle \cap \mathbb{N}$

Resolución:

Observar que $x^2 + 4 > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$, luego:

$$\big|\, |x^2+4+4x| - |x^2+4-4x| \,\big| \geq 32$$

$$\big|\, |(x+2)^2| - |(x-2)^2| \,\big| \geq 32$$

Tener en cuenta el teorema:

$$|x^2| = x^2 \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Luego: $|(x+2)^2 - (x-2)^2| \geq 32$

$$|8x| \geq 32$$

$$8|x| \geq 32$$

$$|x| \geq 4$$

$$x \geq 4 \ \vee\ x \leq -4$$

De donde tenemos:

$$A = \langle -\infty : -4] \cup [4\ ;\ \infty \rangle$$

$\therefore\ \mathbf{A' = \langle -4\ ;\ 4 \rangle}$

Clave: C

PROBLEMA 82

Determine $E = 2^{-1} \# (3^{-1} \# 4^{-1})$, donde # es una operación definida por $a\#b = a + b - 5$; a^{-1} denota al elemento inverso de **a**, en la operación definida.

A) 8 6) 9 C) 10
D) 11 E) 12

Resolución:

Se tiene $\forall$ a, b $\in \mathbb{R}$: $a \# b = a + b - 5$

Hallemos el elemento neutro:

$$a \# e = a$$
$$a + e - 5 = a$$
$$e = 5$$

Ahora podemos plantear que:

$$a \# a^{-1} = e$$
$$2 \# 2^{-1} = 5$$
$$2 + 2^{-1} - 5 = 5 \Rightarrow 2^{-1} = 8$$
$$3 \# 3^{-1} = 5$$
$$3 + 3^{-1} - 5 = 5 \Rightarrow 3^{-1} = 7$$
$$4 \# 4^{-1} = 5$$
$$4 + 4^{-1} - 5 = 5 \Rightarrow 4^{-1} = 6$$

Determinemos el valor pedido:

$$E = 8 \# (7 \# 6)$$
$$E = 8 \# (7 + 6 - 5)$$
$$E = 8 \# 8$$
$$E = 8 + 8 - 5$$
$$\therefore \quad \mathbf{E = 11}$$

Clave: D

PROBLEMA 83

Sea $x \in \left[\frac{1}{4} ; \frac{5}{4}\right]$ y sean M el menor valor y m el mayor valor que satisfacen:

$m \leq \dfrac{x+5}{x-2} \leq M$. Calcular: M.m

A) 24 B) 20 C) 25/3
D) 25 E) –25

Resolución:

La expresión a formar es:

$$\frac{x+5}{x-2} = 1 + \frac{7}{x-2}$$

Por condición tenemos:

$$\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}$$

Sumando (-2) tenemos:

$$-\frac{7}{4} \leq x - 2 \leq -\frac{3}{4}$$

Tomando el recíproco:

$$-\frac{4}{3} \leq \frac{1}{x-2} \leq -\frac{4}{7}$$

Multiplicando por (7):

$$-\frac{28}{3} \leq \frac{7}{x-2} \leq -4$$

Sumando (1) obtenemos:

$$-\frac{25}{3} \leq 1 + \frac{7}{x-2} \leq -3$$

$$\underset{\text{Mayor valor}}{-\frac{25}{3}} \leq \frac{x+5}{x-2} \leq \underset{\text{Menor valor}}{-3}$$

Fácilmente notamos que:

$$M = -3 \ \text{ y } \ m = -\frac{25}{3}$$

$\therefore$ **M.m = 25**

Clave: D

PROBLEMA 84

Si a, b, c $\in \mathbb{R}^+$, determine el mayor valor de K de modo que:

$$\frac{2a^2+3(b^2+c^2)}{a\sqrt{3bc}} \geq K$$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 6

Resolución:

Por propiedad tenemos: MA $\geq$ MG

$$\frac{(a^2)+(a^2)+(3b^2)+(3c^2)}{4} \geq \sqrt[4]{(a^2)(a^2)(3b^2)(3c^2)}$$

$$\frac{2a^2+3(b^2+c^2)}{4} \geq \sqrt[4]{a^4(3ab)^2}$$

$$2a^2+3(b^2+c^2) \geq 4a\sqrt{3bc}$$

$$\frac{2a^2+3(b^2+c^2)}{a\sqrt{3bc}} \geq 4$$

$$\therefore \quad \mathbf{K=4}$$

Clave: D

PROBLEMA 85

Determine el conjunto A, donde:

$$A=\left\{x\in\mathbb{R} \ / \frac{(x-19)^3-2}{(x-19)^2+1} < \frac{(x-19)^3-4}{(x-19)^2+2}\right\}$$

A) $x<17$ B) $0<x<17$

C) $0<x<19$ D) $7<x<19$

E) $x>19$

Resolución:

La inecuación dada es:

$$\frac{(x-19)^3-2}{(x-19)^2+1} < \frac{(x-19)^3-4}{(x-19)^2+2}$$

Hagamos $(x-19)=m$:

$$\frac{m^3-2}{m^2+1} < \frac{m^3-4}{m^2+2}$$

Como $m^2+1, m^2+2>0$:

$$(m^3-2)(m^2+2)<(m^3-4)(m^2+1)$$

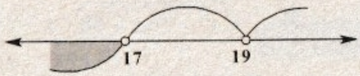
$$m^5+2m^3-2m^2-4<m^5+m^3-4m^2-4$$

$$m^3+2m^2<0$$

$$m^2(m+2)<0$$

Reponiendo la incógnita:

$$(x-19)^2(x-17)<0$$



$$\therefore \quad \mathbf{x<17}$$

Clave: A

PROBLEMA 86

Determine los valores de k para que la inecuación: $\dfrac{x^2+kx+1}{x^2+1}<2$

Se cumple para todo valor real de x.

A) $\langle 0;\infty\rangle$ B) $\langle -1;1\rangle$ C) $\langle -3;3\rangle$

D) $\langle -2;2\rangle$ E) $\langle 2;\infty\rangle$

Resolución

Como $x^2+1>0$, tenemos:

$$x^2+kx+1<2x^2+2$$

$$-x^2+kx-1<0$$

$$x^2-kx+1>0: \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Por propiedad, se cumple:

$$(-k)^2-4(1)(1)<0$$

$$k^2 - 4 < 0$$
$$(k+2)(k-2) < 0$$
$$-2 < k < 2$$
$$\therefore\ \mathbf{k \in \langle -2\ ;\ 2\ \rangle}$$

Clave: D

PROBLEMA 87

Dados los conjuntos:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}\ /\ \frac{x\,(8-x)^2}{x^3 + x^2} \geq 0 \right\}$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R}\ /\ \sqrt{x^2 - 16x + 68}\ > -2 \right\}$$

Determine: $B - (A \cap C)'$

A) $\langle -\infty\ ; -1\rangle \cup \langle 0\ ; \infty\rangle$

B) $\langle -\infty\ ; -1\rangle$

C) $\langle\ 0\ ; \infty\ \rangle$

D) $\langle -\infty\ ; -1\rangle \cup [\ 0\ ; \infty\rangle$

E) $\langle -\infty\ ; -1] \cup [\ 0\ ; \infty\rangle$

Resolución:

Para el conjunto A: $\dfrac{x(8-x)^2}{x^3 + x^2} \geq 0$

$$\frac{x(x-8)^2}{x^2\,(x+1)} \geq 0$$

Siendo $x \neq 0$, tenemos: $\dfrac{(x-8)^2}{x\,(x+1)} \geq 0$

$A = \langle -\infty\ ; -1\ \rangle \cup \langle\ 0\ ; \infty\ \rangle$

Para el conjunto B:

$$\sqrt{x^2 - 16x + 68} > -2$$

Se debe cumplir que:

$$x^2 - 16x + 68 \geq 0$$
$$(x^2 - 8)^2 + 4 \geq 0$$

Fácilmente notamos que: $x \in \mathbb{R}$

$$B = \langle\ -\infty\ ; \infty\rangle$$

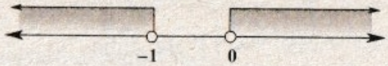
Ahora notamos que:

$$A \cap B = \langle -\infty\ ; -1\rangle \cup \langle\ 0\ ; \infty\ \rangle$$

De donde obtenemos :

$$(A \cap B)' = [-1\ ; 0]$$

Finalmente tenemos que: $B - (A \cap B)'$



$$\therefore\ \mathbf{B - (A \cap B)' = \langle -\infty\ \ ; -1\rangle \cup \langle 0\ ; \infty\ \rangle}$$

Clave: A

PROBLEMA 88

Sea $S = \{a\} \cup [b\ ; c]$ el conjunto solución de la inecuación:

$$x(x-2)^2(x-3)^5(x+1)^6 \leq 0$$

Calcular : $a + b + c$

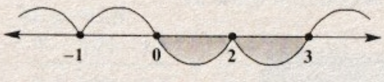
A) 0 B) 1 C) 2

D) 3 E) 4

Resolución:

La inecuación dada es :

$$x(x-2)^2(x-3)^5(x+1)^6 \leq 0$$



Ahora notamos que:

$$S = \{-1\} \cup [0\,;3]$$

Por condición tenemos:

$$a = -1\,;\, b = 0 \wedge c = 3$$

$$\therefore\ \mathbf{a + b + c = 2}$$

Clave: C

PROBLEMA 89

Dado el conjunto:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}\ /\ \frac{(x^3-1)(x^2+x+3)}{\sqrt{x-3}\ \cdot\ \sqrt[3]{x-2}} \leq 0 \right\}$$

Determine A'

A) $\mathbb{R}$ B) ϕ C) $\langle 1\,;\infty\rangle$

D) $\langle 0\,;1]$ E) $\langle -\infty\,;0]$

Resolución:

La inecuación dada es:

$$\frac{(x^3-1)(x^2+x+3)}{\sqrt{x-3}\ \cdot\ \sqrt[3]{x-2}} \leq 0$$

$$\frac{(x-1)(x^2+x+1)(x^2+x+3)}{\sqrt{x-3}\ \cdot\ \sqrt[3]{x-2}} \leq 0$$

Una rápida inspección permite apreciar que $x^2 + x + 1$ y $x^2 + x + 3$ son trinomios positivos para todo valor real de x, luego la inecuación se simplifica a:

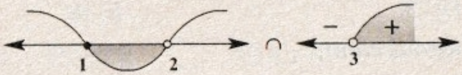
$$\frac{x\text{-}1}{\sqrt{x-3}\ \cdot\ \sqrt[3]{x-2}} \leq 0$$

Asimismo $\sqrt{x-3} > 0$ siempre que $x > 3$, luego la inecuación se puede reescribir del modo siguiente:

$$\frac{x-1}{\sqrt[3]{x-2}} \leq 0\ \wedge\ x-3>0$$

$$\frac{(x-1)^3}{x-2} \leq 0\ \wedge\ x-3>0$$

En la recta real:



Por ser la intersección el conjunto vacío, se concluye que $A = \phi$

$$\therefore\quad \mathbf{A' = \mathbb{R}}$$

Clave: A

PROBLEMA 90

Resolver: $|x-2|^2 - 3|x-2| - 28 < 0$

A) $\langle -4\,;9\rangle$ B) $\langle -5\,;9\rangle$ C) $\langle -3\,;6\rangle$

D) $\langle -5\,;6\rangle$ E) $\langle -2\,;3\rangle$

Resolución:

La inecuación dada es:

$$|x-2|^2 - 3|x-2| - 28 < 0$$

Por aspa simple tenemos:

$$(|x-2|-7)(|x-2|+4) < 0$$

Como $|x-2|+4>0;\ \forall x \in \mathbb{R}$:

$$|x-2|-7<0$$

$$|x-2|<7$$

$$-7<x-2<7$$

$$-5<x<9$$

$$\therefore\quad \mathbf{C.S. = \langle -5\,;9\rangle}$$

Clave: B

PROBLEMA 91

Si $\langle a ; b\rangle - \{c\}$ es el conjunto solución de la inecuación:

$$(|x-3|+2)^2 < 5|x-3|+4$$

Calcular: $a^2+b^2+c^2$

A) 32 B) 29 C) 25

D) 23 E) 18

Resolución:

La inecuación dada es :

$$|x-3|^2+4|x-3|+4<5|x-3|+4$$

$$|x-3|^2-|x-3|<0$$

$$|x-3|\cdot(|x-3|-1)<0$$

Si $x\neq 3$, $|x-3|>0\ \forall x\in\mathbb{R}$:

$$|x-3|-1<0$$

$$|x-3|<1$$

$$-1<x-3<1$$

$$2<x<4$$

Pero $x\neq 3$, luego tenemos:

$$x\in\langle 2;4\rangle-\{3\}$$

Por condición se cumple que:

$$a=2 ;\ b=4 \wedge c=3$$

$$\therefore \quad \mathbf{a^2+b^2+c^2=29}$$

Clave: B

PROBLEMA 92

El conjunto solución de la inecuación:

$$|1-|x-8||\geq\sqrt{25-x^2}$$

Se puede expresar como $[a ; b]\cup[c ; d]$. Indique el valor de:

$$K=|a|+|b|+|c|+|d|$$

A) 18 B) 17 C) 15

D) 13 E) 11

Resolución:

Por existencia en $\mathbb{R}$:

$$25-x^2\geq 0 \longleftrightarrow x^2-25\leq 0$$

$$(x+5)(x-5)\leq 0 \longleftrightarrow -5\leq x\leq 5$$

De donde obtenemos:

$$-5\leq x\leq 5 \longleftrightarrow -13\leq x-8\leq -3$$

$$|x-8|=-(x-8)$$

Ahora la inecuación dada es:

$$|1+(x-8)|\geq\sqrt{25-x^2}$$

$$|x-7|\geq\sqrt{25-x^2}$$

Asimismo también tenemos:

$$-5\leq x\leq 5 \longleftrightarrow -12\leq x-7\leq -2$$

$$|x-7|=-(x-7)$$

En la inecuación dada:

$$-(x-7)\geq\sqrt{25-x^2}\ \wedge\ -5\leq x\leq 5$$

$$(x-7)^2\leq 25-x^2\ \wedge\ -5\leq x\leq 5$$

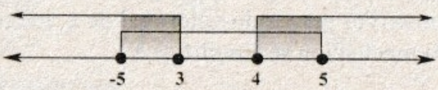
$$x^2-14x+49\geq 25-x^2\ \wedge\ -5\leq x\leq 5$$

$$2x^2-14x+24\geq 0\ \wedge\ -5\leq x\leq 5$$

$$x^2-7x+12\geq 0\ \wedge\ -5\leq x\leq 5$$

$$(x-4)(x-3)\geq 0\ \wedge\ -5\leq x\leq 5$$

En la recta real:



$$CS=[-5;3]\cup[4;5]$$

Finalmente tenemos:

$$K=|-5|+|3|+|4|+|5|$$

$$K=5+3+4+5$$

$$\therefore\ \mathbf{K=17}$$

Clave: B

PROBLEMA 93

Si se resuelve la desigualdad: $x^2 + 4 \geq |3x + 2| - 7x$

Se obtiene: $x \in \langle -\infty\ ;\ p] \cup [q\ ;\ \infty\rangle$. Cuál (es) de los enunciados siguientes son correctos.

I. $p.q > 0$

II. $p + q = -7 - \quad 19 + 2$

III. $p^2 + q^2 = 10$

A) sólo I B) sólo II C) sólo III D) I y II E) II y III

Resolución:

La inecuación dada es:

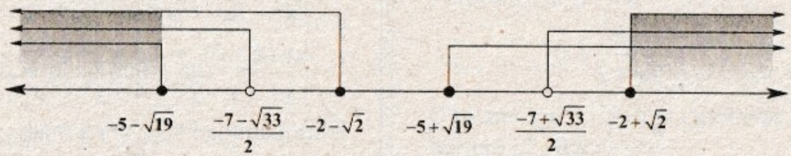
$$-|3x + 2| \geq -x^2 - 7x - 4$$
$$|3x + 2| \leq x^2 + 7x + 4$$

De donde se cumple que:

$$x^2 + 7x + 4 > 0 \quad \wedge \quad -x^2 - 7x - 4 \leq 3x + 2 \leq x^2 + 7x + 4$$
$$x^2 + 7x + 4 > 0 \quad \wedge \quad (3x + 2 \geq -x^2 - 7x - 4 \quad \wedge \quad x^2 + 7x + 4 \geq 3x + 2)$$
$$x^2 + 7x + 4 > 0 \quad \wedge \quad x^2 + 10x + 6 \geq 0 \quad \wedge \quad x^2 + 4x + 2 \geq 0$$
$$x^2 + 7x + 4 > 0 \quad \wedge \quad x^2 + 10x + 6 \geq 0 \quad \wedge \quad x^2 + 4x + 2 \geq 0$$

$$x_1 = \frac{-7 - \sqrt{33}}{2} \qquad x_1 = -5 - \sqrt{19} \qquad x_1 = -2 - \sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-7 + \sqrt{33}}{2} \qquad x_2 = -5 + \sqrt{19} \qquad x_2 = -2 + \sqrt{2}$$



Fácilmente notamos que: $x \in \langle -\infty\ ;\ -5 - \sqrt{19}\ ] \cup [-2 + \sqrt{2}\ ;\ \infty\rangle$

Por condición tenemos: $p = -5 - \sqrt{19}$ y $q = -2 + \sqrt{2}$

Analizando cada enunciado: I(V) ; II(V) ; III(F)

Clave: D

PROBLEMA 94

El conjunto solución de la inecuación:

$$\frac{\sqrt{2-|x|}\,(1-x^2)}{(\,|x+3|+x-1)(\,|x|-2)} \geq 0$$

Es $[a\,;\,b\rangle$ calcular $a+b$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

Resolución

Por existencia en $\mathbb{R}$.

$2-|x|>0 \quad \longleftrightarrow \quad |x|<2$

$-2<x<2$ ....(1)

C omo $|x|<2$, entonces :

$|x|-2<0$ ....(2)

Asimismo también tenemos:

$-2<x<2$

$3-2<x+3<2+3$

$1<x+3<5$

De donde notamos que:

$|x+3|=x+3$ ....(3)

Con (2) y (3) la inecuación es:

$$\frac{1-x^2}{x+3+x-1} \leq 0$$

$$\frac{1-x^2}{2x+2} \leq 0$$

$$\frac{x^2-1}{2(x+1)} \geq 0$$

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x+1} \geq 0$$

Considerando que $x \neq -1$: $x-1 \geq 0$

$x \geq 1$...(4)

Finalmente de (1) y (4):

$x \geq 1 \quad \wedge \quad -2<x<2$

$x \in [1\,;\,2\rangle$

Por condición tenemos:

$a=1 \vee b=2$

$\therefore \quad \mathbf{a+b=3}$

Clave: C

PROBLEMA 95

Al resolver: $\dfrac{|x^2-2x|+4}{x^2+|x+2|} \leq 1$

Se obtiene $x \in \langle -\infty\,;\,a] \cup [\,b\,;\,\infty\rangle$. Cuál (es) de los siguientes enunciados son correctos.

I. $a+b=0$

II. $ab=-4$

III. $a-b=6$

A) sólo I B) sólo II C) sólo III

D) I y II E) I, II y III

Resolución:

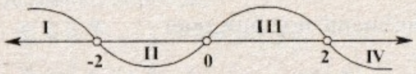
Observa que $x^2+|x+2|>0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$, luego la inecuación propuesta se puede reescribir así:

$|x^2-2x|+4 \leq x^2+|x+2|$

$|x(x+2)|+4 \leq x^2+|x+2|$

$|x|\cdot|x-2|+4 \leq x^2+|x+2|$

Eliminando el V.A. por zonas:



Zona (I): $-\infty<x<-2$

$(-x)(-x+2)+4 \leq x^2-(x+2)$

$$x^2 - 2x + 4 \leq x^2 - x - 2$$
$$-x \leq -6 \quad \longleftrightarrow \quad x \geq 6$$

Observa que la solución es el vacío:

$$CS(I) = \phi$$

Zona (II) : $-2 \leq x < 0$

$$(-x)(-x+2) + 4 \leq x^2 + x + 2$$
$$x^2 - 2x + 4 \leq x^2 + x + 2$$
$$-3x \leq -2 \quad \longleftrightarrow \quad x \geq \frac{2}{3}$$

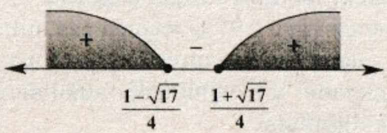
Observa que la solución es el vacío:

$$CS\,(II) = \phi$$

Zona (III) : $0 \leq x < 2$

$$(x)\,(-x+2) + 4 \leq x^2 + x + 2$$
$$-x^2 + 2x + 4 \leq x^2 + x + 2$$
$$-2x^2 + x + 2 \leq 0 \quad \longleftrightarrow \quad 2x^2 - x - 2 \geq 0$$
$$x_1 = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$$
$$x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$$

En la recta real tenemos:



Observa que la solución es:

$$CS(III) = [\ \frac{1+\sqrt{17}}{4}\ ;\ 2\ \rangle$$

Zona (IV) : $2 \leq x < \infty$

$$(x)(x-2) + 4 \leq x^2 + x + 2$$
$$x^2 - 2x + 4 \leq x^2 + x + 2$$
$$-3x \leq -2 \quad \longleftrightarrow \quad x \geq \frac{2}{3}$$

Observa que la solución es:

$$CS(IV) = [2\ ;\ \infty\rangle$$

Finalmente debemos recordar que la solución de la inecuación viene dada por la unión de todas las soluciones obtenidas en las zonas planteadas.

$$\therefore\ \ \mathbf{CS} = [\ \frac{1+\sqrt{17}}{4}\ ;\ \infty\ ]$$

Observación: ***La condición del problema,*** $x \in \langle -\infty\ ;\ a] \cup [b\ ;\ \infty\rangle$ ***está mal dada, por tanto no podemos analizar a los enunciados ¿Porqué? Porque el intervalo*** $\langle -\infty\ ;\ a]$ ***no existe em el conjunto solución.***

PROBLEMA 96

Determinar "a" máximo y "b" mínimo si se cumple que:

$$a \leq \frac{x^3+4}{2x-1} < b\ \ ;\ \forall\, x \in [2\ ;\ 3\rangle$$

Resolución:

La relación dada es :

$$a \leq (x^3+4)\ .\ \frac{1}{2x-1} < b$$

Formando a $x^3 + 4$: $2 \leq x < 3$

$$8 \leq x^3 < 27$$
$$12 \leq x^3 + 4 < 31\ \ ...(1)$$

Observa que $x^3 + 4$ es creciente en el intervalo $[2\ ;\ 3\rangle$

Formando a $\frac{1}{2x-1}$: $2 \leq x < 3$

$$4 \leq 2x < 6$$
$$3 \leq 2x - 1 < 5$$

$$\frac{1}{5} < \frac{1}{2x-1} \leq \frac{1}{3} \qquad ....(2)$$

Observa que $\dfrac{1}{2x-1}$ es decreciente en el intervalo $[2 ; 3\rangle$

Como (1) y (2) son expresiones opuestas (creciente y decreciente), al realizar la multiplicación sus extremos se efectuarán en forma de aspa, veamos:

$$12 \cdot \frac{1}{3} \leq (x^3+4) \cdot \frac{1}{2x-1} < 31 \cdot \frac{1}{5}$$

$$4 \leq \frac{x^3+4}{2x-1} < \frac{31}{5}$$

$$\therefore \qquad \mathbf{a = 4} \ \wedge \ \mathbf{b = \frac{31}{5}}$$

PROBLEMA 97

Demostrar que si $x \in [-2 ; 1]$, entonces

$$1 \leq \frac{5-x}{x+3} \leq 7$$

Resolución:

La expresión a analizar es $(5-x) \cdot \dfrac{1}{x+3}$

Formando a $(5-x)$: $-2 \leq x \leq 1$

$$-1 \leq -x \leq 2$$

$$4 \leq 5-x \leq 7 \quad ....(1)$$

Observa que $(5-x)$ es decreciente en el intervalo $[-2 ; 1]$

Formando a $\dfrac{1}{x+3}$: $-2 \leq x \leq 1$

$$1 \leq x+3 \leq 4$$

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x+3} \leq 1 \qquad ....(2)$$

Observa que $\dfrac{1}{x+3}$ es decreciente en el intervalo $[-2 ; 1]$

Como (1) y (2) son expresiones no opuestas (ambas crecientes o ambas decrecientes) al realizar la multiplicación sus extremos se efectuarán en forma directa, veamos:

$$4 \cdot \frac{1}{4} \leq (5-x) \cdot \frac{1}{x+3} \leq 7 \cdot 1$$

$$\therefore \qquad 1 \leq \frac{5-x}{x+3} \leq 7$$

Conclusiones: Para valores extremos de una expresión fraccionaria.

i) Si los factores son no opuestos sus extremos se multiplican en forma directa (prob. 97)

ii) Si los factores son opuestos sus extremos se multiplican en forma de aspa (prob. 96)

Observación: La regla expuesta en los problemas 96 y 97 se recomienda utilizarlas cuando en la expresión fracciona-ria, numerador y denominador admitan grados diferentes.

Si los grados fuesen iguales sería más fácil proceder según el método expuesto en el prob. 83 (descomponer a la fracción)

PROBLEMA 98

Resolver : $[\![\,|x+4|\,]\!] = 5 + [\![\,|x-1|\,]\!]$

Resolución:

Observa que $[\![\,|x-1|\,]\!] \geq 0$, luego:

$$[\,|x-1|\,]+5 \geq 5$$
$$[\,|x+4|\,] \geq 5$$

De donde se debe cumplir que:

$$|x+4| \geq 5$$
$$x+4 \geq 5 \ \vee \ x+4 \leq -5$$
$$x \geq 1 \ \vee \ x \leq -9$$

i) Si $x \leq -9$: $[\![-(x+4)]\!] = 5 + [\![-(x-1)]\!]$

$$[\![-x-4]\!] = 5 + [\![-x+1]\!]$$
$$[\![-x]\!] - 4 = 5 + [\![-x]\!] + 1$$
$$-4 = 6 \text{ ¡absurdo!}$$

Por tanto el conjunto solución aquí es el vacío: $CS(i) = \phi$

ii) Si $x \geq 1$: $[\![x+4]\!] = 5 + [\![x-1]\!]$

$$[\![x]\!] + 4 = 5 + [\![x]\!] - 1$$
$$4 = 4 \text{ ¡correcto!}$$

$\therefore$ **C.S. = [1 ; ∞⟩**

PROBLEMA 99

Resolver: $[\![x^2]\!] \geq \sqrt{1-x^2}$

Resolución:

Por existencia en $\mathbb{R}$:

$$1-x^2 \geq 0 \longleftrightarrow x^2-1 \leq 0$$
$$(x+1)(x-1) \leq 0 \longleftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

i) Si $x \in \langle -1 ; 1 \rangle$, entonces: $0 \leq x^2 < 1$

$$[\![x^2]\!] = 0$$

Ahora la inecuación será: $0 \geq \sqrt{1-x^2}$

De donde necesariamente: $1-x^2 = 0$

$$x = 1 \quad \text{ó} \quad x = -1$$

Observa que los valores obtenidos para x no satisfacen el intervalo de acción, por tanto aquí el conjunto solución es vacío.

ii) Si $x = \pm 1$, entonces $x^2 = 1$

$$[\![x^2]\!] = 1$$

Ahora la inecuación será: $1 \geq \sqrt{1-x^2}$

$$1 \geq \sqrt{1-1}$$
$$1 \geq 0 \text{ ¡correcto!}$$

$\therefore$ **C.S. = {–1 ; 1}**

PROBLEMA 100

Resolver: $[\![3x-1]\!] > [\![x+3]\!]$

Resolución:

La inecuación dada es :

$$[\![3x]\!] - 1 > [\![x]\!] + 3$$
$$[\![3x]\!] > [\![x]\!] + 4$$

De aquí se cumple que: $3x \geq [\![x]\!] + 5$ ..(1)

$$3x-4 \geq [\![x]\!] + 1$$

Se sabe que $\forall\, x \in \mathbb{R}$ se cumple:

$$[\![x]\!] + 1 > x$$

Luego por transitividad:

$$3x-4 > x$$
$$2x > 4$$
$$x > 2$$

i) $2 < x < 3$: $[\![x]\!] = 2$, en (1):

$$3x \geq 2+5$$
$$3x \geq 7$$
$$x \geq \frac{7}{3}$$

Ahora notamos que: $C.S(i) = [7/3 ; 3 \rangle$

ii) $x \geq 3 \rightarrow 3x \geq [\![x]\!] + 5$

Ahora notamos que: $C.S(ii) = [3 ; \infty\rangle$

Finalmente se cumple que:

$$C.S. = C.S(i) \cup C.S(ii)$$

$\therefore$ **C.S. = [7/3 ; ∞⟩**

Problemas Propuestos

PROBLEMA 1

Si $\left(\frac{a-9}{2}-\frac{7}{8}\right)$ es un elemento de $\mathbb{R}$ cuyo reflexivo es $\frac{1}{8}\left(\frac{14-2a}{5}-\frac{a-5}{4}\right)+\frac{a-1}{4}$.

¿De qué elemento se trata?

A) 17 B) 16/5 C) 7/2

D) 25/8 E) 49/16

PROBLEMA 2

Determine el valor de "b" en :

$(2 * b) * (4 * b) = 3 * b$; si se define el operador $*$ sobre A = {2, 3, 4} tal que:

*	2	3	4
2	4	3	2
3	2	3	4
4	3	2	2

A) {2, 4} B) {3, 1} C) {4, 6}

D) {0, 1} E) {2, 6}

PROBLEMA 3

Si los elementos de $\mathbb{R}$: $2+\frac{1-2a}{3}$ y $\frac{1-3a}{7}+2a-7$ son inversos aditivos, obtener el valor de a.

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

PROBLEMA 4

Se define $\forall$ a, b $\in \mathbb{Z}$: $(a\#b)^2 = (a - b)^2$ determine la suma de los posibles resultados de:

$(k+3)\#(k-1)$; si $k \in \mathbb{Z}$.

A) 1 B) 0 C) –1

D) 4 E) 5

PROBLEMA 5

Para qué valor de "b" los reales:

$\frac{3b-5}{6}+2b$ y $\left(\frac{3b-2}{3}-\frac{4-b}{2}+2\right)^{-1}$ son

inversos multiplicativos?

A) 1/5 B) 1/6 C) 1/7

D) 1/8 E) 1/9

PROBLEMA 6

Se define una operación $*$ en $Q - \{1; -1\}$ tal que $a*b = a + b + |ab|$; determine el elemento neutro de la operación.

A) 0 B) –1 C) 1

D) 10 E) 5

PROBLEMA 7

Si los elementos de $\mathbb{R}$: $\frac{a-1}{2} - 14$ y $11 - \frac{b}{10}$

son los elementos neutros de la adición y multiplicación respectivamente, calcular $a + b$.

A) 110 B) 129 C) 227

D) 60 E) 78

PROBLEMA 8

Dado $A = \{1, 2, 3, 4\}$, se define sobre la operación $*$ tal que:

*	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	4	3	2	1
4	3	4	1	2

Determine el valor de "b" en:

$$[(3*2)*(2*b)*3] = 2*3$$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 0

PROBLEMA 9

Para qué valor de **a** los elementos de $\mathbb{R}$:

$$\frac{7a}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}} \text{ y } \frac{7a-1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}}; \text{ son opuestos?}$$

A) 1/7 B) 1/9 C) 1/11

D) 1/13 E) 1/15

PROBLEMA 10

Si en $\mathbb{R}$, la operación $*$ está definida por $a*b = 3a + b$ determine su elemento neutro.

A) 1 B) 0 C) 2

D) 4 E) ∄

PROBLEMA 11

Determine "x", sabiendo que el opuesto de A más el recíproco de (1/8) es igual a 5, donde:

$$A = \frac{Op(x)+5}{Rec(3)}$$

$$B = \frac{Op(3x)+2}{Rec(6)}$$

A) $-\frac{18}{17}$ B) $-\frac{8}{15}$ C) $-\frac{8}{13}$

D) 9 E) –8

PROBLEMA 12

Si la tabla adjunta:

*	1	2	3	4
1	3	4	1	2
2	4	1	2	3
3	1	2	3	4
4	2	3	4	1

Define a la operación $*$ sobre $A = \{1, 2, 3, 4\}$, determine $a*b$ sabiendo que: $=(2*2)*b$; siendo "b" el elemento neutro respecto a la operación $*$

A) 0 B) –1 C) 1
D) 5 E) 4

PROBLEMA 13

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. La suma de 2 números irracionales es siempre otro número irracional.

II. El cociente de 2 números irracionales es siempre otro número irracional.

III. El producto de 2 números irracionales es siempre otro número irracional.

A) VVV B) VVF C) FVF
D) FFF E) VFF

PROBLEMA 14

Sabiendo que: $a * b = a + 2b$; $a, b \in \mathbb{Z}^+$

$c \# d = 2c + d$; $c, d \in \mathbb{N}$

Simplificar: $\dfrac{2a*b+a \;\#\; 2b+2a*2b}{3b*2b+2a \;\#\; b+2a}$

A) –1 B) 0 C) 1
D) 2 E) 1/2

PROBLEMA 15

Siendo a, b y c elementos de $\mathbb{R}$, indicar cuál (es) de las siguientes afirmaciones:

I. $a = b \Rightarrow a + c = b + c$

II. $a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$

III. $a = b \Rightarrow \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{c}$

Son siempre verdaderas.

A) sólo III B) sólo I
C) sólo I y II D) sólo II
E) sólo II y III

PROBLEMA 16

Definidas las operaciones en $\mathbb{R}$

$$a*b = 2a + 3b - 1$$

$$a \# b = a - b + 2$$

Calcular $x + y$ del sistema:

$$x * y = 5 \quad ...(1)$$

$$(3x) \# (-2y) = 1 \quad ...(2)$$

A) –4 B) 1 C) 4
D) 6 E) 8

PROBLEMA 17

Siendo a, b y c reales, ¿cuáles de las proposiciones:

I. $a + c = b + c \Rightarrow a = b$

II. $ac = bc \Rightarrow a = b$

III $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{c} \Rightarrow a = b$

son verdaderas?

A) sólo I B) sólo II
C) sólo I y II D) sólo II y III
E) sólo III

PROBLEMA 18

Se define $*$ en $\mathbb{R}-\{0\}$ así: $a*b = 2ab$ además C^{-1} es el elemento inverso de C respecto al operador. Determine 4^{-1}.

A) 1/2 B) 1/16 C) 1/8
D) –8 E) –1

PROBLEMA 19

Determine el valor de verdad de cada una de las afirmaciones:

I. $\frac{1}{4} \in Q$ II. $-10 \in \mathbb{Z}$

III. $\frac{0}{3} \in Q$ IV. $0,\widehat{29} \in Q'$

V. $3,1416.... \in Q'$

A) VVVFV B) VFFFV C) VFVFF
D) VVFFF E) VVVFF

PROBLEMA 20

En el conjunto de los números enteros positivos definimos las siguientes operaciones:

$m \perp n = m^2 - n$; $p*q = 3p - q^2$; $r \# s = 2r + 3s$

Si $a \perp a = 6$

$b * b = -4$

Determine: $a \# b$

A) 2 B) 18 C) 10
D) –1 E) –2

PROBLEMA 21

Determine el valor de verdad de cada afirmación:

I. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} \in Q'$ II. $\left(\frac{-1}{3}\right)^{\left(\frac{-1}{3}\right)} \in Q'$

III. $(-1)^{-1} \in \mathbb{Z}$ IV. $\left(\frac{-1}{2}\right)^{-1} \in Q$

A) VVVV B) VFVV C) VFFV
D) FVVF E) FFFV

PROBLEMA 22

En $\mathbb{R}$ definimos la operación Ψ, según la ley: $a \,\psi\, b = a - b + 2$

Sea x' el universo de x bajo la operación ψ, determine el valor de "m" a partir de:

$$m' \,\psi\, 2' = 5' \,\psi\, m'$$

A) 2 B) –1 C) 1
D) 5 E) ∄

PROBLEMA 23

Siendo x un número irracional, determine el valor de verdad de las proposiciones:

I. x^2 es irracional
II. Toda potencia de x es irracional
III. Alguna potencia de x es irracional.
IV. El inverso de x es irracional.

A) VVVV B) FFFV C) VFFV
D) VVFF E) FFVV

PROBLEMA 24

Se define en $\mathbb{R} - \{1/2\}$ la siguiente operación binaria $*$: $a * b = a + (1 - 2a)b$

Determine x de: $x^{-1} * 2^{-1} = 0$

A) 2 B) 1/3 C) 2/3

D) 3/2 E) 1

PROBLEMA 25

Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. Si $a \in \mathbb{R}, \exists!\, x \in \mathbb{R} / ax = a$

II. Si $a \in \mathbb{R}, \exists!\, x \in \mathbb{R} / a + x = a$

III. Si $a, x \in \mathbb{R} \Rightarrow (a + x)^2 = a^2 + x^2$

A) VFV B) FFV C) VVV

D) FVF E) VVF

PROBLEMA 26

Sea $A = \{a, b, c, d\}$ y la operación binaria $*$ mediante la tabla:

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Determine: $[(d*a^{-1}) * b^{-1}] * b^{-1}$

A) a B) d C) c

D) d E) b^{-1}

PROBLEMA 27

Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. $1/a = a^{-1}$; $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$

II. $a - b = a + (-b)$; $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$

III. $\dfrac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b$; $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$

A) VFV B) FVV C) VVV

D) VVF E) FVF

PROBLEMA 28

Se define el operador $*$ así:

$a*b = ab + a + b$; si el elemento neutro es e:

Determine: $a^{-1} * b^{-1}$

A) $1+\dfrac{a+b}{ab}$ B) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ C) $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}$

D) $\dfrac{a+b}{(a+1)(b+1)}$ E) $\dfrac{a+b+ab}{(a+1)(b+1)}$

PROBLEMA 29

Si $a, b \in Q'$ determine el valor de verdad para cada caso:

I. $(a + b) \in Q'$

II. $(a - b) \in Q'$

III. $(a \,.\, b) \in Q'$

A) VVV B) VFF C) FFF

D) FVV E) FVF

PROBLEMA 30

Si se define sobre $\mathbb{N} - \{0\}$

$$F(a) * F(b) = F(a * b)$$

*	1	2	3	4
1	1	2	2	2
2	2	1	2	2
3	2	2	2	1
4	2	2	2	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Reducir: $[...[F(1)*F(2)*F(3)]*....*F(100)]$

A) F(2) B) F(1) C) 1
D) 2 E) F(∞)

PROBLEMA 31

Siendo a y b números racionales indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $a^b \in Q$

II. $a^b \in \mathbb{R}$

III. a° y $b^\circ \in \mathbb{N}$

A) VVF B) VFV C) FVV
D) VVV E) FFV

PROBLEMA 32

Definida la operación $\cup$ (unión) en el conjunto: $A = \{\phi; \{a\}; \{b\}; \{a, b\}\}$, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. El neutro de la operación es ϕ.

II. Si $x \cup x^{-1} = y$; donde $x, y, x^{-1} \in A$, entonces $x \cap x^{-1} \cap y = \phi$ ($\cap$ intersección)

III. A tiene un único elemento inversible.

A) VVV B) VFV C) FVF
D) FFF E) VVF

PROBLEMA 33

Se define en $\mathbb{R}$ la operación binaria $*$ así: $a*b = a + b + 3ab$. Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $a * b = b * a$

II. Si $a * x = a$; $\forall a \in \mathbb{R}$, entonces $x = 0$

III. Si $1 * y = 0 \Rightarrow y = -1$

A) VFV B) VVF C) FFV
D) FVV E) VVV

PROBLEMA 34

Sea $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ y la operación binaria $*$ definida en:

*	0	2	4	6	8
0	4	6	8	0	2
2	6	8	0	2	4
4	8	0	2	4	6
6	0	2	4	6	8
8	2	4	6	8	0

Si $[(x^{-1}*0)*4]^{-1} = 2$, x^{-1} es el inverso de x en $*$, halle x.

A) 6 B) 4 C) 0
D) 2 E) 8

PROBLEMA 35

Si a, b, c $x \in \mathbb{R}$ donde $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales tal que x es el elemento inverso de (a + b), entonces el valor de $bx + 1$ es:

A) 1 B) −1 C) 2

D) − 2 E) 0

PROBLEMA 36

Halle el menor valor de k ; si

$x^2+x+1 \le k; \forall x \in \langle -2\ ;\ 1\rangle$

A) 9/4 B) 3/4 C) 5/4

D) 3 E) 9/2

PROBLEMA 37

Si $-1 < a < 0 \wedge b > 1$; indique el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

I. $\dfrac{b+1}{a-1} > 0$

II. $b^2 > a^2$

III. $1 - ab > 2a$

A) VVV B) FVF C) FFV

D) FVV E) FFF

PROBLEMA 38

Sea x e y números reales positivos. Determine el máximo valor de n, si:

$$\left[\frac{x^2+27}{3x}\right]^{1/2} \cdot \left[\frac{y^2+27}{9y}\right]^{1/2} \ge n$$

A) 0 B) 1 C) 2

D) $\sqrt{3}$ E) 27

PROBLEMA 39

Encuentre los valores que toma la expresión

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+1} \text{ si } x \in [1; 2\rangle$$

A) $\langle 0; 3/2]$ B) $\langle 7/5 ; 3/2]$ C) $\langle 1 , 2]$

D) $[1, 2\rangle$ E) $[3/2 ; +\infty\rangle$

PROBLEMA 40

¿Cuántas proposiciones son verdaderas?

I. $x < y \rightarrow x < \dfrac{x+y}{2} < y$

II. $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{y} \rightarrow x > y$

III. $x^2 + xy + y^2 > 0 ; \forall x, y \in \mathbb{R}$

IV. $-5 < x < 3 \rightarrow 0 \le |x| < 3$

A) 0 B) 1 C) 2

D) 3 E) 4

PROBLEMA 41

Halle el mínimo valor de la expresión:

$\sqrt{x^2-2x+2}+2$; si $x \in \mathbb{R}$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) $\sqrt{3}$

PROBLEMA 42

Sea $x > 2$ halle el mínimo valor de P; si:

$$\frac{x^2}{x^2-1} \le P$$

A) 4 B) 3 C) 2

D) 4/3 E) 5

PROBLEMA 43

¿Cuántos valores enteros para "x" satisfacen:

$$2<\frac{x-7}{x-5}<12$$

A) 1 B) 6 C) 3

D) 5 E) 7

PROBLEMA 44

Si $x \in [1; 2]$ hallar el intervalo de:

$$\frac{x^2+x+1}{x^4+1}$$

A) $[-4/11 ; 5/2]$ B) $\langle -5/2 ; 4/11]$

C) $[4/11 ; 5/2]$ D) $[2/17 ; 4]$

E) N.A

PROBLEMA 45

Determinar el menor número natural par que verifique:

$$\frac{4x-3}{2}-x>\frac{2}{3}(x+1)$$

A) 7 B) 8 C) 10

D) 6 E) N.A.

PROBLEMA 46

Resolver: $-\frac{1}{x+8}+\frac{1}{x+1}<0$. Indicando la suma de todos los valores enteros que verifican la desigualdad.

A) – 18 B) – 19 C) – 21

D) – 27 E) N.A.

PROBLEMA 47

Indique el intervalo solución de la siguiente inecuación:

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{2x}{3x-6}\geq 0$$

A) $1 \leq x \leq 2$ B) $1 < x < 2$

C) $1 < x < 3$ D) $3 < x < 4$

E) N.A.

PROBLEMA 48

Para qué valores de "n" el sistema:

$$\begin{cases} 3x+6y=1 & \text{.... I} \\ 5x+ny=2 & \text{....II} \end{cases}$$

Tiene soluciones que satisfacen:

$$x>0 \ \wedge \ y<0$$

A) $\langle -\infty ; 6 \rangle$ B) $\langle 10 ; \infty \rangle$

C) $\langle -\infty ; 10 \rangle$ D) $\langle 6 ; \infty \rangle$

E) N.A.

PROBLEMA 49

A qué intervalo petenece "n" si el sistema:

$$\begin{cases} 9x+7y=n & \text{... I} \\ 3x+5y=13 & \text{...II} \end{cases}$$

tiene soluciones positivas

A) $\langle 91/5 ; \infty \rangle$ B) $\langle -\infty ; 91/5 \rangle$

C) $\langle 26/3 ; 91/5 \rangle$ D) $\langle 91/5 ; 39 \rangle$

E) $\langle 2/3 ; 9/7 \rangle$

PROBLEMA 50

Qué condición deberá cumplir "n" para que una de las raíces de la ecuación:

$$x^2 + 2(n+5)x + 20n = 0$$

Sea menor que cuatro.

A) $n < -2$ B) $n > -2$ C) $n < 2$

D) $n > 2$ E) N.A

PROBLEMA 51

Entre qué límites debe variar "n" para que la inecuación: $x^2 + 2nx + n > 3/16$; se verifique para todo valor real "x".

A) $\langle -\infty ; 1/4 \rangle$ B) $\langle -\infty ; 3/4 \rangle$

C) $\langle 1/4 ; 3/4 \rangle$ D) $\langle -1/4 ; 3/4 \rangle$

E) N.A.

PROBLEMA 52

Hallar el mayor número "N" con la propiedad que:

$$\frac{x^2+6x+14}{x^3+27} \geq N$$

Si $x \in [-2 ; 2]$

A) 35/6 B) 30/19 C) 19/30

D) 6/35 E) N.A

PROBLEMA 53

Indicar la solución de la inecuación:

$$\frac{x^6+3x^4+3x^2+4}{x^4-4x^3-2x^2+12x+9} > 0$$

A) $x > 3 \cup x < -1$ B) $2 < x < 4$

C) $x < -1 \cup -1 < x < 3 \cup x > 3$

D) absurda E) absoluta

PROBLEMA 54

Resolver:

$$\frac{1}{x+3} - \frac{9(x-2)}{x^2+5x+6} < \frac{24}{x^3+6x^2+11x+6}$$

Señale qué valor de "x" satisface la inecuación:

A) 1 B) 0,3 C) –1,5

D) 3,5 E) N.A

PROBLEMA 55

Entre qué límites debe variar "m" para que: $(m^2-m-2)x^2 + 2mx - 1 < 0$ no tenga solución para "x"

A) $2 < m < \infty$ B) $-\infty < m < -2$

C) $m \leq -2$ D) $m \leq -3$

E) N.A.

PROBLEMA 56

El número entero "x" que cumple la desigualdad:

$$\frac{x}{x+1} < \frac{12}{19} < \frac{x+1}{x+2} \text{ es:}$$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

PROBLEMA 57

Resolver:

$$\begin{cases} 3 - \dfrac{3-7x}{10} + \dfrac{x+1}{2} > 4 - \dfrac{7-x}{2} \\ 7(3x-6) + 4(17-x) > 11 - 5(x-3) \end{cases}$$

A) $\langle 1 ; 3 \rangle$ B) $\langle 2 ; 8 \rangle$ C) $\langle 0 ; 9 \rangle$

D) $\langle 1/2 ; 5 \rangle$ E) $\langle 1/2 ; 7 \rangle$

PROBLEMA 58

Resolver:

$$\begin{cases} \dfrac{x+50}{5} > \dfrac{x}{2} & \text{.... I} \\ (3-x)^3 + x^3 < 8 + (3x+1)^2 & \text{.... II} \\ (x+2)^2 > (x+1)^2 + 2 & \text{.... III} \end{cases}$$

A) $\langle 6/11 , 100/3 \rangle$ B) $[6/11 ; 100/3]$

C) $\langle 5/11 ; 20 \rangle$ D) $\langle 4/11 ; 17 \rangle$

E) N.A.

PROBLEMA 59

Resolver la inecuación:

$\sqrt{3x-2} + \sqrt{2x-3} - \sqrt{2x-5} > \sqrt{3x}$

Para luego indicar el intervalo solución:

A) $\langle -3 ; 5/2 \rangle$ B) $[5 ; \infty \rangle$

C) $[-3 ; \infty \rangle$ D) $\langle -5/2 ; \infty \rangle$

E) $[5/2 ; \infty \rangle$

PROBLEMA 60

Resolver: $\sqrt{\sqrt{x+10} - \sqrt{3-x}} > -5$

A) $[-3 ; 2]$ B) $[-2 \;\; 3 ; 2 \;\; 2]$

C) $[-7/2 ; 15/4]$ D) $[-7/2 ; 3]$

E) N.A.

PROBLEMA 61

La suma de los valores enteros de "x" que satisfacen al siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{13x-5}{2} + \dfrac{3x-8}{5} > \dfrac{2x+7}{3} + 1 & \text{... I} \\ \dfrac{3x-1}{5} - 1 < \dfrac{x+1}{2} - \dfrac{x}{7} & \text{... II} \end{cases}$$

es:

A) 5 B) 9 C) 14

D) 20 E) 27

PROBLEMA 62

Resolver:

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-3} > \dfrac{x-4}{x+1} & \text{...I} \\ \dfrac{x-1}{x+5} > \dfrac{x-2}{x+2} & \text{...II} \end{cases}$$

A) $\langle 1{,}5 ; 3{,}5 \rangle$ B) $\langle -1 ; 1 \rangle \cup \langle 3 ; \infty \rangle$

C) $\langle -\infty ; -5 \rangle \cup \langle -2 ; 4 \rangle$

D) $\langle -1 ; 1 \rangle \cup \langle 3 ; 4 \rangle$

E) N.A.

PROBLEMA 63

Hállese el menor número real "M" tal que se cumpla:

$$6 + 6x - x^2 \leq M \;\; : \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

A) 12 B) 15 C) 19

D) 21 E) N.A.

PROBLEMA 64

Hallar el mayor número real "n" tal que se cumpla:

$$n \leq x^2 - 4x + 41 \;\; : \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

A) 32 B) 37 C) 39

D) 41 E) 42

PROBLEMA 65

Resolver: $\dfrac{(x-5)^8(x+1)^{11}(x-2)^5}{(2x^2+x+5)(x-3)^7} \geq 0$

A) $[-1\,;2] \cup \langle 3\,;8\rangle$

B) $[-2\,;3\rangle \cup \langle 3\,;5\rangle$

C) $[-1\,;2\rangle \cup \langle 3\,;\infty\rangle$

D) $\langle 3\,;7\rangle \cup \langle 7\,;\infty\rangle$

E) $[3\,;5\rangle \cup \langle 6\,;\infty\rangle$

PROBLEMA 66

Resolver:

$$\frac{(x^2+2x+15)(x^2-1)(x-1)(x+7)}{(x-5)(x^2-4)(x-2)(x^2+3)} \leq 0$$

A) $\langle -\infty\,;7] \cup \langle 1\,;2\,] \cup \langle 3\,;\infty\rangle$

B) $[-7\,;-2] \cup [-1\,;2\rangle \cup \langle 2\,;5\rangle$

C) $\langle -7\,;-2] \cup \langle -1\,;2\rangle \cup \langle 2\,;\infty\rangle$

D) $\langle -7\,;-2\rangle \cup \langle -1\,;2\rangle \cup \langle 2\,;5\,]$

E) $\langle -5\,;-1\rangle \cup \langle 0\,;1\rangle \cup \langle 2\,;4\,]$

PROBLEMA 67

Hállese el valor de "K" si:

I) $x \in [-6\,;-4]$

II) $K = \dfrac{|8x+94|-|-3x+94|}{x}$

A) $8+188x$ B) $5+188x$ C) 11

D) Tiene 2 soluciones E) x

PROBLEMA 68

Si $x \in \langle 0\,;3\rangle$

Calcular: $M = \dfrac{|17x+2|-|3x+2|}{x}$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

PROBLEMA 69

Sabiendo que $b > 0 \wedge |x-a| < 2b$. Hallar el intervalo al que permanece.

$$\frac{b}{x-a+3b}$$

A) $\langle -1\,;1\rangle$ B) $\langle -5\,;1\rangle$

C) $\langle 1/5\,;1\rangle$ D) $\langle -1\,;1/5\rangle$

E) $\langle 0\,;2\rangle$

PROBLEMA 70

Resolver: $\left|x+\dfrac{1}{3}\right| < \dfrac{4}{3}$

A) $\left\{x \in \mathbb{R}\ /-\dfrac{1}{3} < x < 1\right\}$ B) $\left\langle -\dfrac{5}{3}\ ;\ 1\right\rangle$

C) $\left\{x \in \mathbb{R}\ /1 < x < \dfrac{5}{3}\right\}$ D) $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$

E) ϕ

PROBLEMA 71

Resolver: $|6-2x| \geq 7$

A) $\langle -\infty\,;1/2\,] \cup [13/2\,;\infty\rangle$

B) $\langle -\infty\,;1/2\rangle \cup \langle 13/2\,;\infty\rangle$

C) $\langle -\infty\,;3/2\,] \cup [15/2\,;\infty\rangle$

D) $\langle -\infty ; 3] \cup \langle 5 ; \infty \rangle$

E) $\langle -\infty ; 1] \cup \langle 6 ; \infty \rangle$

PROBLEMA 72

Resolver: $|x+4| \leq |2x-6|$

A) $\langle -\infty ; 2/3] \cup [10 ; \infty \rangle$

B) $[2/3 ; 10 \rangle$ C) $\langle 2/3 ; 10]$

D) $\langle -\infty ; 2/3 \rangle \cup \langle 10 ; \infty \rangle$ E) $[2 ; 10]$

PROBLEMA 73

Determine el conjunto solución para la desigualdad.

$$2\sqrt{2}x + \frac{5}{\sqrt{2}x} \leq 3\sqrt{2}$$

A) $x \in \langle -\infty ; -\sqrt{21} \rangle$ B) $x \in \langle 0 ; +\infty \rangle$

C) $x \in \langle -\infty ; 0 \rangle$ D) $x \in [\sqrt{2} ; +\infty \rangle$

E) $x \in \phi$

PROBLEMA 74

Hallar el menor valor que verifica la inecuación:

$$\frac{3x+2}{3x-2} < \frac{x+1}{x-1}$$

A) 1 B) 2 C) 3

D) –2 E) 4

PROBLEMA 75

Resolver: $\sqrt{x-6} < 4$

A) $[0 ; 1 \rangle$ B) $[6 ; 22 \rangle$ C) $[-6 ; 6 \rangle$

D) $\langle -2 ; 2]$ E) ϕ

PROBLEMA 76

Resolver: $\sqrt{2-x-x^2} > -5$

A) $\langle 0 ; 5]$ B) $[-2 ; 1]$ C) $\langle -5 ; 2]$

D) $\langle 0 ; 6 \rangle$ E) $\langle -2 ; 5]$

PROBLEMA 77

Resolver: $\sqrt{x+6} > x$. Dar su intervalo de solución:

A) $\langle 0 ; 6]$ B) $\langle -6 ; 6]$ C) $\langle -1 ; 4 \rangle$

D) $[-6 ; 3 \rangle$ E) ϕ

PROBLEMA 78

Dar un intervalo solución de la desigualdad:

$$\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-8} > 3$$

A) $[8 ; 12 \rangle$ B) $\langle 8 ; 16 \rangle$ C) $[8 ; 12]$

D) $\langle 8 ; 12 \rangle$ E) ϕ

PROBLEMA 79

Resolver: $\sqrt{2^{8x-1}} > 4^{x^2 - \frac{33}{4}}$

Dando como respuesta la suma de los valores enteros que toma "x".

A) 0 B) 3 C) 4

D) 5 E) –5

PROBLEMA 80

Si $x \in \langle 0 ; 3 \rangle$ calcular:

$$M = \frac{|7x+2| - |3x+2|}{x}$$ es:

A) 4 B) 3 C) 5

D) 2 E) 7

PROBLEMA 81

Indicar un intervalo solución para la inecuación:

$$\sqrt[3]{-2x^2+x+1}<1$$

A) $\langle 1/2 ; \infty \rangle$ B) $\langle 1 ; +\infty \rangle$

C) $\langle 0 ; 1 \rangle$ D) $\langle -1/2 ; 2 \rangle$

E) $\langle 0 ; +\infty \rangle$

PROBLEMA 82

Hallar la suma de los valores de "x" que satisfacen la ecuación: $||x|-1|=x$

A) 2 B) 0 C) 3/2

D) 1/2 E) 1

PROBLEMA 83

Resolver: $\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{4x^2-25}\geq 0$ e indique el número de valores enteros que asume "x".

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) ∞

PROBLEMA 84

Indique un intervalo solución de la siguiente desigualdad:

$$\frac{x^4(x^3+9)(x-3)^2(x-9)}{(x-3)^2}\leq 0$$

A) $[-\sqrt[3]{9}\ ; 9]-\{3\}$ B) $\langle 0 ; 3 \rangle$

C) $[0 ; 9]$ D) $[-3 ; 9]$ E) $\langle 9 ; +\infty \rangle$

PROBLEMA 85

Resolver; indicar su intervalo solución:

$$\sqrt{2x^2-9x-5}\leq 5-x$$

A) $x\in[-6 ; 1/2]\cup\{5\}$ B) $x\in\phi$

C) $x\in\langle -2 ; 3]\cup\{2\}$ D) $x\in\mathbb{R}$

E) $x\in\langle 2 ; 7 \rangle$

PROBLEMA 86

Resolver la inecuación:

$$\frac{3x^5+9x^3+3x}{6x^4+18x^2+6}\leq 1$$

A) $\langle 3 ; 6 \rangle$ B) $\langle -\infty ; 2]$ C) $\langle -1 ; 2 \rangle$

D) $\langle 0 ; 1 \rangle$ E) $\langle 0 ; 3]$

PROBLEMA 87

Hallar el intervalo en el que debe variar "m" para que:

$$\left|\frac{x^2-mx+1}{x^2+x+1}\right|<3\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}$$

A) $\langle -2 ; 1 \rangle$ B) $\langle 0 ; 1 \rangle$

C) $\langle -5 ; 1 \rangle$ D) $\langle -5 ; -2 \rangle$

E) $\langle 1 ; 6 \rangle$

PROBLEMA 88

Determine el complemento de A.

Si $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,\dfrac{|2x+1|-x}{x}\leq 2\right\}$

A) $\langle -\infty ; 0 \rangle \cup [1 ; +\infty \rangle$ B) $x \in \phi$

C) $\langle -\infty ; -1/5] \cup [1 ; +\infty \rangle$ D) $[0 ; 1 \rangle$

E) $\langle -1/5 ; 1 \rangle$

PROBLEMA 89

Si a, b, c $\in \mathbb{R}^+$ calcular "n" en la desigualdad

$$a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} \geq \frac{m}{a+b+c}$$

A) 2 B) 1 C) 3

D) 9 E) 12

PROBLEMA 90

Resolver el sistema sobre $\mathbb{Z}^+$

$$x + y + z < 22$$
$$x - y - z < -14$$
$$x - 2 > 0$$

Indicar: $A = (x + y + z)(x - y - z)$

A) –315 B) 315 C) 340

D) 324 E) F.D

PROBLEMA 91

Al resolver el sistema: $\forall\, x, y, z \in \mathbb{Z}^+$

$$5x - 3y + 2z > 7 \quad ....(1)$$
$$2x + y + z < 14 \quad ....(2)$$
$$x + 3y < 15 \quad ....(3)$$
$$y > 3 \quad ....(4)$$

Calcular: $E = x + y + z$

A) 17 B) 13 C) 11

D) 8 E) 6

PROBLEMA 92

Cuál sería el conjunto de valores admisibles de "n" para que la desigualdad:

$(n + 3)x^2 - \sqrt{84}x + 5n - 1 < 0$ no acepte solución para todo x real.

A) $\langle -4 ; 6/5 \rangle$ B) $\langle -3 ; +\infty \rangle$

C) $\langle -\infty ; -4 \rangle$ D) $\langle 6/5 ; +\infty \rangle$

E) $\langle -4 ; +\infty \rangle$

PROBLEMA 93

Resolver:

$$\sqrt[8]{4 - x^2} \cdot (x + 2)^7 \cdot \sqrt[5]{x - 3} \cdot (x + 1)^4 \cdot x^3 \geq 0$$

Indicar su intervalo solución.

A) $[-2 ; 2]$ B) $\langle -\infty ; -2 \rangle$

C) $\langle 3 ; +\infty \rangle$ D) $[-2 ; 6]$

E) $[-2 ; 0] \cup \{2\} \cup \{3\}$

PROBLEMA 94

Resolver el siguiente sistema:

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{x} < 5 \quad ...(1)$$
$$x^2 \leq 16 \quad ...(2)$$
$$x^2 - 9x + 14 < 0 \quad ...(3)$$

Dando su intervalo solución

A) $x \in \langle 2 ; 4 \rangle$ B) $\langle 3 ; 6 \rangle$ C) $x \in \phi$

D) $x \in \langle 2 ; 8 \rangle$ E) $x \in \mathbb{R}$

PROBLEMA 95

Resolver: $\dfrac{|x| - 1}{2 - x} \geq 0$

A) $x \in \langle -1 ; 1 \rangle$ B) $x \in [2 ; +\infty \rangle$

C) $x \in [1 ; 2\rangle - \{3/2\}$ D) $x \in \phi$

E) $x \in \langle -\infty ; -1] \cup [1 ; 2 \rangle$

PROBLEMA 96

Resolver la inecuación:

$$\frac{4-\sqrt{x^2+7}}{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2+1}} \geq 0$$

A) $-3 \leq x \leq 3$ B) $x \in \mathbb{R}$

C) $x < -3 \cup x > 3$ D) $x > 3$

E) Inecuación absurda

PROBLEMA 97

Determinar el menor valor de M en:

$$-13 - x^2 - 4x \leq M \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

A) -1 B) -9 C) 9

D) -3 E) 3

PROBLEMA 98

Indicar la suma de las soluciones de:

$$3|x+1| + |x-8| = 19$$

A) 4/3 B) 9 / 4 C) 5/ 7

D) 1/2 E) 11/6

PROBLEMA 99

Resolver: $|x^2 - 1| \leq 9 - x^2$

A) $x \in [-\sqrt{5} \; ; \; \sqrt{5}]$ B) $x \in \mathbb{R}$

C) $x \in \langle -3 ; 3]$ D) $x \in \phi$

E) $x \in \langle 0 ; +\infty \rangle$

PROBLEMA 100

Resolver el sistema:

$$\frac{|x|}{x-5} < 0 \qquad ...(1)$$

$$\frac{x}{|x|-6} > 0 \qquad ...(2)$$

A) $x \in \langle -6 ; 0 \rangle$ B) $x \in \langle 0 ; 5 \rangle$

C) $x \in \langle 5 ; 6 \rangle$ D) $x \in \phi$

E) $x \in \mathbb{R}$

PROBLEMA 101

Resolver: $2 < |x^2 - x - 1| < |x^2 + x|$

A) $\langle \frac{1+\sqrt{13}}{2} \; ; \; \infty \rangle$ B) $\langle 3 ; \infty \rangle$

C) $\langle \frac{\sqrt{13}-1}{2} \; ; \; \infty \rangle$ D) $\langle \frac{1}{2} \; ; \; \infty \rangle$

E) $\langle -1 ; \infty \rangle$

PROBLEMA 102

Resolver la desigualdad:

$$2x + \sqrt{x - \frac{1}{x} - \left| x + \frac{1}{x} \right|} + \sqrt{4-x} \leq 0$$

A) $\langle -4 ; 4 \rangle$ B) $\langle -\infty ; 4 \rangle$ C) $\langle 2 ; 7 \rangle$

D) $\langle -\infty ; 0 \rangle$ E) N.A.

PROBLEMA 103

Resolver: $\dfrac{|3x - x^2| - 4}{4 - |x|} > -1$

A) $\langle -4;0\rangle \cup \langle 1;2\rangle$ B) $\langle -2;2\rangle$

C) $\langle -4;0\rangle \cup \langle 0;2\rangle$ D) $\langle -4;2\rangle$

E) N.A.

PROBLEMA 104

Resolver: $\dfrac{x-|x-4|}{25-x^2}>0$

A) $\langle -\infty;-5\rangle \cup \langle 2;5\rangle$

B) $\langle -\infty;-5\rangle \cup \langle 0;4\rangle$

C) $\langle 0;4\rangle \cup \langle 4;5\rangle$

D) $\langle -\infty;-5\rangle \cup \langle 5;\infty\rangle$

E) N.A.

PROBLEMA 105

Hallar el menor valor de "M" que satisface la siguiente desigualdad:

$$\left|\frac{2x+1}{x-2}-\frac{1}{2}\right| \leq \text{M} \ \text{ para } x \in [4;7]$$

A) 7/21 B) 25/4 C) 4

D) 4/25 E) 5

PROBLEMA 106

Calcular "M" para que se verifique para todo valor real de "x" la siguiente desigualdad:

$$-3<\frac{x^2-\text{M}x+1}{x^2+x+1}<3$$

A) $\text{M} \in \langle -\infty;0\rangle$ B) $\text{M} \in \langle -\infty;-1\rangle$

C) $\text{M} \in \langle -5;1\rangle$ D) $\text{M} \in \langle 1;5\rangle$

E) $\text{M} \in \langle -2;3\rangle$

PROBLEMA 107

Indique el menor valor natural de "x" que cumple con la siguiente inecuación:

$$\frac{\sqrt[5]{x^2-2x-15}\,(x^3-6x^2+9x)}{(x-1)^4(x-2)^7} \leq 0$$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

PROBLEMA 108

Resolver: $\left[\!\left[\dfrac{6-2x}{x}\right]\!\right]=4$

A) [6/7; 1] B) ⟨6/7 ; 1] C) [3/2 ; 4⟩

D) [3/2 ; 2⟩ E) [1/2 ; 3⟩

PROBLEMA 109

Resolver: $\left[\!\left[\dfrac{2x-1}{x+3}\right]\!\right]=4$

A) [–13/2 ; –16/3 ⟩ B) ⟨ 13/2 ; 4]

C) ⟨ – 13/2 ; 16/3 ⟩ D) ⟨ 2 ; 5]

E) ⟨ – 11/2 ; 13/4 ⟩

PROBLEMA 110

Resolver: $\left[\!\left[\dfrac{3x+2}{x-1}\right]\!\right] \leq \dfrac{13}{3}$

A) $\langle -\infty;1\rangle \cup [7/2;\infty\rangle$

B) $\langle -\infty;1\rangle \cup \langle 7/2;\infty\rangle$

C) $\langle -\infty;3/2\rangle \cup \langle 3;\infty\rangle$

D) $\langle -\infty;1\rangle \cup \langle 1;\infty\rangle$

E) $\langle -\infty;-1\rangle \cup \langle 1;\infty\rangle$

PROBLEMA 111

Resolver: $[\![x^2-8]\!] > 1/2$

A) $\langle -\infty ; -3] \cup [3 ; \infty\rangle$

B) $\langle -\infty ; -1\rangle \cup \langle 2 ; \infty\rangle$

C) $\langle -\infty ; -1] \cup \langle 3 ; \infty\rangle$

D) $\langle -\infty ; -2\rangle \cup \langle 4 ; \infty\rangle$

E) $\langle -\infty ; -2\rangle \cup \langle 3 ; \infty\rangle$

PROBLEMA 112

Hállase el conjunto solución de:

$$\frac{\sqrt{x/\ (2-x)}}{x^2-[\![x]\!]\,|x|-3/4} \le 0$$

A) $\langle 0 ; 3/2\rangle \cup [1 ; 3/2\rangle$ B) $\langle 4 ; \infty\rangle$

C) $[0 ; \sqrt{3}/2\rangle \cup [1 ; 3/2\rangle$ D) $\langle 7 ; \infty\rangle$

E) $\langle 3/2 ; 4\rangle \cup \langle 5 ; \infty\rangle$

PROBLEMA 113

Resolver: $\dfrac{\sqrt{4-|x|}}{[\![x^2-2x-7]\!]} > 0$

A) $\langle -4 ; -2]$ B) $\langle -\infty ; 2\rangle$

C) $\langle 2 ; 5\rangle \cup \langle 6 ; \infty\rangle$ D) $[-4 ; \infty\rangle$

E) $\langle 0 ; 1\rangle \cup \langle 3 ; \infty\rangle$

PROBLEMA 114

Si a un número de 3 cifras múltiplo de 11 se le resta 396 se obtiene otro número mayor que el mismo número; invertido, se pide el valor de la cifra de las decenas sabiendo que la suma de sus cifras extremas es superior.

A) 7 B) 4 C) 2

D) 6 E) 5

PROBLEMA 115

Un muchacho empezó comiendo un cierto número de naranjas después compró 5 más que también se las comió resultando que había comido más de diez naranjas. Compró 8 naranjas más y al comércelos observó que había comido en total más del triple de naranjas que comió la primera vez. ¿Cuántas naranjas comió en total el muchacho?

A) 6 B) 11 C) 17

D) 19 E) 21

PROBLEMA 116

Un comerciante adquirió cierto número de artículos de los que vendió 70 y le quedaron más de la mitad, al día siguiente le devolvieron 6, pero logro vender 36 después de lo cual le quedaron menos de 42. ¿Cuántos artículos adquirió el comerciante?

A) 138 B) 139 C) 140

D) 141 E) 142

PROBLEMA 117

En un número de 4 cifras: a la cifra de las unidades se le suma tantas veces como la cifra lo indica y se le agrega 188 veces el valor de la cifra entonces será menor que cuatro veces. El cuadrado de

dicha cifra más 480 unidades ¿Cuáles podrían ser las cifras de las unidades de dicho número?

A) 9, 8, 7 B) 8, 7, 6 C) 7, 5, 4
D) 1, 0, 2 E) 1, 3, 6

PROBLEMA 118

A 3 hermanos A, B y C les regalaron el mismo número de granadas. "A" comió los 7/12 de las suyas más la mitad de una, "B" comió la mitad de las que tenía más una y "C" comió 1/3 de una y de la mitad del número; que resultaría si le hubiera regalado, una más.

"A" comió menos que "B" y más que "C" ¿Cuántas granadas recibió cada hermano?

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 5

PROBLEMA 119

Si [a ; b] es el conjunto solución de:

$2x^2 \leq (\sqrt{x}+1)^2 + (\sqrt{x}-1)^2$ calcule a + b

A) 0 B) 1 C) –1
D) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ E) 2

PROBLEMA 120

Si ⟨ 3 ; 5 ⟩ es el conjunto solución de:

$2x^2 + \dfrac{a}{4}x + 3b \leq 8$, calcule 2a + 3b

A) –22 B) –90 C) –16
D) 36 E) –26

PROBLEMA 121

Determine **n**, si el polinomio $p(x) = x^2 - 2x + n$; es no menor que 1, $\forall x \in \mathbb{R}$.

A) $[2 ; \infty\rangle$ B) $\langle -2 ; 2\rangle$
C) $[-1 ; 2]$ D) $\langle -\infty ; 2]$
E) $\langle -\infty ; 1/2\rangle \cup [1/2 ; 2]$

PROBLEMA 122

Si $P(x) = (n-1)x^2 + (n-1)x + 1 > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$, determine el menor valor entero de n.

A) 1 B) 2 C) 0
D) 4 E) – 1

PROBLEMA 123

Luego de resolver $x^4 - 3 \leq x^2$, indique la suma de las soluciones enteras

A) 1 B) 2 C) 0
D) 4 E) 5

PROBLEMA 124

Señale cuántas soluciones enteras presenta la inecuación

$$x^4 + x^2 + 1 < x^3$$

A) 3 B) 4 C) 0
D) 6 E) 1

PROBLEMA 125

Resuelva : $(x^2-2)(x^3-5)x^2 < 0$

A) $\langle -\infty ; -\sqrt{2}] \cup \langle \sqrt{2} ; \sqrt[3]{5}\rangle$
B) $\langle -\infty ; -\sqrt{2}\rangle \cup [\sqrt{2} ; \sqrt[3]{5}\rangle$
C) $\langle -\infty ; -\sqrt{2}\rangle \cup \langle \sqrt{2} ; \sqrt[3]{5}\rangle$

D) $\langle -\infty ; \sqrt{2} \rangle \cup \langle \sqrt{2} ; \sqrt[3]{5} \rangle$

E) $\langle -\infty ; -\sqrt{2} \rangle \cup [\sqrt{2} ; \sqrt[3]{5} \rangle$

PROBLEMA 126

Resuelva: $(x^2 - x)(x^3 - 1)^5 > 0$

A) $\langle 0 ; 1 \rangle \cup [1 ; +\infty]$

B) $\langle 0 ; 1 \rangle \cup \langle 1 ; +\infty \rangle$

C) $\langle -\infty ; 0 \rangle \cup \langle 1 ; +\infty \rangle$

D) $\langle -\infty ; -1 \rangle \cup \langle 1 ; +\infty \rangle$

E) $\langle -\infty ; -1 \rangle \cup \langle -1 ; 0 \rangle$

PROBLEMA 127

Al resolver $(x - 1)(x + a)(x^2 + bx + c) > 0$

el conjunto solución es:

$\langle -\infty ; 1 \rangle \cup \langle 1 ; 2 \rangle \cup \langle 2 ; +\infty \rangle$

Calcule el menor valor de a + b + c

A) 3 B) 1 C) – 1

D) – 2 E) – 3

PROBLEMA 128

Al resolver $(\operatorname{sen} x + 2)(3^x + 5)(25 - x^2)(x - 1) \leq 0$; se tiene el conjunto solución $[a ; b] \cup [c ; +\infty \rangle$, calcule – a + b + c.

A) 10 B) 1 C) 11

D) 9 E) –1

PROBLEMA 129

Al resolver:

$(x - b)(x - c)(ax^2 + ax - 1) < 0$; se obtiene como conjunto solución:

$\langle -\infty ; b \rangle \cup \langle c ; +\infty \rangle$, $b \neq c$ indique ínf(A).

A es el conjunto formado por los valores de a.

A) –4 B) –3 C) –4/3

D) –3/4 E) 0

PROBLEMA 130

Al resolver la inecuación polinomial $(ax + 2)(x - b)^{a+3}(x + c)^{a+5} \geq 0$; el conjunto solución es: $\langle -\infty ; -c] \cup [b ; +\infty \rangle$. Calcule el valor de $a + c^a + b^a$; si $bc \neq 0$.

A) 2 B) 0 C) –2

D) 3 E) 5

PROBLEMA 131

Si $\langle a ; \frac{1}{b} \rangle \cup \langle \frac{1}{c} ; d \rangle$ es el conjunto solución de: $x^4 - 7x^2 + 1 < 0$; calcule $\frac{1}{c} + \frac{1}{d}$

A) $-1-\sqrt{5}$ B) $-3+\sqrt{5}$ C) 0

D) $\sqrt{7}-\sqrt{5}$ E) 5

PROBLEMA 132

Resuelva la inecuación $\dfrac{ax+1}{bx+1} \geq \dfrac{x+a}{x+b}$;

donde a > b > 1

A) $\langle -b ; -1 \rangle$ B) $[-1/b ; 1]$

C) $[-1 ; 1]$ D) $\langle -\infty ; -b]$

E) $\langle -\infty ; -b \rangle \cup [-1 ; -1/b \rangle \cup [1 ; \infty \rangle$

PROBLEMA 133

Indique la cantidad de números enteros del conjunto $A \cap B$.

$A = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ 1/x < 1 \}$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ \frac{20}{x^2+3x+2} > 1 \right\}$$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

PROBLEMA 134

Resuelva $\dfrac{(4x+8)(x^2-1)}{x-1} < -1$

A) $\langle -\infty ; -3/2 \rangle$ B) $\{-3/2\}$ D) $\mathbb{R}$

C) $\langle -3/2 ; +\infty \rangle$ E) ϕ

PROBLEMA 135

La siguiente ecuación:

$2x - \dfrac{9}{x-3} > x - \dfrac{5}{x-3}$ se sastiface para

A) $-2 < x < 2$ ó $x > 3$

B) $-1 < x < 3$ ó $x > 4$

C) $-3 < x < 1$ ó $2 < x < 3$

D) $-10 < x < 3$

E) Todos los números reales diferentes de 3

PROBLEMA 136

Dados: $A = \left\{ x \in \mathbb{R} / \dfrac{1}{x-1} < \dfrac{1}{x-2} \right\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 3x^2 - x + 1 > 0\}$

Halle: $(A \cap B)^C$

A) $[1 ; 2]$ B) $\langle 1 ; 2]$ C) $[2 ; 3]$

D) $\langle 2 ; 3 \rangle$ E) $\langle -\infty ; 1 \rangle \cup \langle 2 ; +\infty \rangle$

PROBLEMA 137

Dada la inecuación: $\dfrac{(x-1)(x+a)}{x^2+bx+c} > 0$. Si el conjunto solución es C.S. = $\mathbb{R} - \{1 ; 2\}$, calcule el mayor valor de a + b + c.

A) –1 B) – 3 C) 3

D) 0 E) – 4

PROBLEMA 138

Al resolver: $\dfrac{1}{(ax^2+(3-2a)x-6)} \geq 0$. Se obtiene como conjunto solución $\langle 1 ; \beta \rangle$. Indique el valor de a$\beta$.

A) –6 B) 13 C) 4

D) 5 E) 3

PROBLEMA 139

Al resolver:

$\dfrac{ax^3+(10+a)x^2+8x+2}{x-1} \geq 0$. Se obtiene $\langle -\infty ; b] \cup [c ; +\infty \rangle - \{k\}$; $k > c$. Calcule el valor de $b^{-1} + c^{-1} + k + a$ donde $a \in \mathbb{Z} \wedge a < 14$

A) 2 B) – 2 C) 4

D) 5 E) 9

PROBLEMA 140

Indique el valor de K de modo que la solución de la inecuación $\dfrac{2x-1}{x+2} > K$ sea $\langle -\infty ; -2 \rangle \cup \langle 3 ; +\infty \rangle$

A) 40 B) 20 C) 3
D) 4 E) 1

PROBLEMA 141

Al resolver:

$$\frac{x^2+x-1}{x^2+1}+\frac{x^2+x}{x^2+2}+\frac{x^2+x+1}{x^2+3}\leq 3$$

Se obtiene el conjunto solución:
$\langle -\infty ; a] \cup [b ; c]$. Calcule el valor de

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+c$

A) – 1 B) 0 C) 3/2
D) 4 E) 5

PROBLEMA 142

Resuelva:

$$\left(1-\frac{x}{1+x}\right)\left(1+\frac{x}{1-x}\right)\left(2-\frac{1+2x^2}{1+x^2}\right)\left(4-\frac{3+4x^2}{1+x^4}\right)\geq 1$$

Indique la cantidad de cifras de la mayor solución

A) 1 B) 0 C) 2
D) 3 E) No se puede determinar

PROBLEMA 143

Halle el intervalo en el cual debe estar comprendido n para que la inecuación:

$$\frac{3(2n+1)x^2-2(4n+5)x+5n+9}{5x^2-6x+5}<n+2$$

Se verifique para cada valor de x:

A) ϕ B) $\langle -2 ; 3 \rangle$ C) $\langle 0 ; 4 \rangle$
D) $\langle -\infty ; 7 \rangle$ E) $\mathbb{R}$

PROBLEMA 144

Resuelva la inecuación irracional

$$\sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}\leq 1$$

A) $\langle 0 ; 2]$ B) $[1 ; 2]$ C) $\langle 1/2 ; 2]$
D) $[1 ; 1]$ E) $[1 ; +\infty \rangle$

PROBLEMA 145

Dado el conjunto:

$F=\{x\in \mathbb{R} \,/\, x+2\sqrt{5-4x}>5\}$; determine $n(F\cap \mathbb{Z})$

A) 6 B) 5 C) 3
D) 4 E) 7

PROBLEMA 146

Resuelva la inecuación irracional

$$\sqrt{x+2}\geq 4-x$$

A) $[2 ; \infty \rangle$ B) $[4 ; +\infty\rangle$ C) $[-2 ; +\infty \rangle$
D) $[2 ; 4]$ E) $[-2 ; 4]$

PROBLEMA 147

Sabiendo que el conjunto solución de:

$\sqrt[4]{x-3}+|x-3|\leq|2-x|$ es $[a ; b]$, determine $(a+b)$

A) 7 B) 5 C) 6
D) 8 E) 4

PROBLEMA 148

Resuelva $||x|-|2||=\text{sen}\,(\pi/2)$

A) $[-1 ; 3]$ B) $\{3 ; 1\}$ C) $\{1 ; -1\}$
D) $\{-3 ; -1 ; 3 ; 1\}$ E) $\{-3 ; -1\}$

PROBLEMA 149

Si $|x-8| = p$; $p > 0$, donde $x \leq 8$; calcule $|x+p|$.

A) 0 B) 22 C) 1
D) 6 E) 8

PROBLEMA 150

¿Cuántas soluciones tiene?

$$|x^2-2x+5| = x^2-1/2$$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

PROBLEMA 151

Halle el número de soluciones
$|5-|x|| = |3x-2|$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

PROBLEMA 152

Halle la suma de soluciones de la ecuación: $|2-|x|^2| = |8x^2-9|$

A) 8 B) 16 C) 0
D) 4 E) 64

PROBLEMA 153

Resuelva:

$|x+1|+|x+2|+2 = ||2x+3|+2|$

A) $\langle -\infty; -2\rangle \cup \langle 1; +\infty\rangle$ B) $\langle -2; -1\rangle$
C) $\langle -\infty; -2] \cup [-1; +\infty\rangle$ D) $[-2; -1]$
E) $\mathbb{R}$

PROBLEMA 154

Halle la suma de soluciones de la ecuación

$$|2x-6|+|x+2| = 7$$

A) 11/3 B) 14/3 C) 17/2
D) 0 E) –1

PROBLEMA 155

Resuelva: $x^2+x+3 \leq |2x^2-4x+9|$

A) $[2; 3]$ B) $\mathbb{R}$ C) $[3; +\infty\rangle$
D) $[2; +\infty\rangle$ E) $\mathbb{R}-\langle 2; 3\rangle$

PROBLEMA 156

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si $|x| < -8$; entonces $-8 < x < 8$

II. La ecuación $x^2-2|x|+3 = 0$ no tiene solución

III. Si $|x+y| = |x|+|y|$; entonces x, $y \in \mathbb{R}^+$

IV. Si $|xy| = xy$; entonces x, $y \in \mathbb{R}^+$

A) FFFF B) VVFF C) FVVV
D) FVVF E) FVFF

PROBLEMA 157

Si $\langle -\infty; 2b\rangle \cup [3b; +\infty\rangle - \{a\}$ es el conjunto solución de:

$$\frac{4-|x-2|}{3-|x-1|} \geq 0 \text{ ; halle } a+b$$

A) –2 B) 0 C) 1
D) 2 E) 3

PROBLEMA 158

Sean $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x^2 - 2x - 3| < 3x - 3\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x - 2| \geq 2x - 3\}$

Calcule $A \cap B$

A) $\langle 2\,;\,5\rangle$ B) $\langle -\infty\,;\,5/3]$ C) ϕ

D) $\langle 2\,;\,5/3\,]$ E) $[5/3\,;\,5\rangle$

PROBLEMA 159

Resuelva: $|x^2 - 4| < -2x + 4$

A) $\langle -4\,;\,+\infty\rangle$ B) $\langle -\infty\,;\,-4\rangle$

C) $\langle -4\,;\,-2\rangle$ D) $\langle -4\,;\,0\rangle$

E) $\langle 0\,;\,2\rangle$

PROBLEMA 160

Resuelva: $\left|\dfrac{x^2 - 2x + 2|}{x - 1}\right| < 1$

A) ϕ B) $\langle -1\,;\,1\rangle$ C) $\langle 1\,;\,+\infty\rangle$

D) $\langle -\infty\,;\,-1\rangle$ E) $\mathbb{R} - \{1\}$

PROBLEMA 161

Resuelva $|3x - 8| \leq 7|x - 2| + |4x - 6|$

A) $\langle 0\,;\,+\infty\rangle$ B) $\langle -\infty\,;\,+\infty\rangle$

C) $\langle -\infty\,;\,0]$ D) $[8/3\,;\,6\rangle$ E) $[0\,;\,6]$

PROBLEMA 162

Si $x \in \langle -2\,;\,0\rangle$, halle la variación de $\left|\dfrac{x-8}{x+3}\right|$

A) $\langle 8\,;\,10\rangle$ B) $\langle 3\,;\,5\rangle$ C) $\langle 8/3\,;\,10\rangle$

D) $\langle 1\,;\,3\rangle$ E) $\langle 1/3\,;\,8\rangle$

PROBLEMA 163

Halle el máximo valor entero que no puede tomar x en: $|x^2 - 1| \leq (x + 1)^2$

A) –3 B) –2 C) –1

D) 0 E) 1

PROBLEMA 164

Si $|x| < 2$; halle el mínimo valor dek tal que: $\left|\dfrac{x-3}{x-4}\right| < k\,;\,k \in \mathbb{Z}$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 5/6 E) 6

PROBLEMA 165

Resuelva: $\dfrac{|x-6| - x}{x-3} < 2$

A) $\mathbb{R}$ B) $[6\,;\,+\infty\rangle$ C) $\langle 3\,;\,+\infty\rangle$

D) $\langle -\infty\,;\,0\rangle \cup \langle 3\,;\,+\infty\rangle$ E) $\mathbb{R} - \{3\}$

PROBLEMA 166

Con respecto a la desigualdad

$$a^3 + b^3 + c^3 < 3abc$$

¿Cuál es la relación correcta?

A) $a \neq b \neq c$ B) $a + b + c = 0$

C) $a = b = c = 0$ D) $a + b + c \leq 0$

E) $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

PROBLEMA 167

Dado el conjunto

$$B=\left\{\frac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x^2}}\;/\;x>0\right\}$$

determine el conjunto de las cotas inferiores

A) $\langle 0;5]$ B) $[0;5\rangle$ C) $\langle 0;5\rangle$
D) $[0;5]$ E) $\langle -\infty;5]$

PROBLEMA 168

Determine el máximo producto

$xy(72-3x-4y)$; donde x; $y>0$

A) 1100 B) 1260 C) 1200
D) 1152 E) 1160

PROBLEMA 169

Sean a, b y c los lados de un triángulo, tal que $a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c)\le k\,abc$. Determine el valor de k.

A) $\langle 0;3]$ B) $[3;+\infty\rangle$ C) $\langle -\infty;3]$
D) $[0;3]$ E) $[0;+\infty\rangle$

PROBLEMA 170

Resuelva: $\dfrac{(x^2-4)(x^2-2|x|-3)}{x+3}\le 0$

A) $\langle -3;-2]$ B) $\langle -3;-2]\cup[2;3]$
C) $[-2;2]$ D) $\langle -\infty;-2]\cup[2;+\infty\rangle$
E) $\langle -\infty;-2]\cup[2;3]-\{3\}$

PROBLEMA 171

Dé el valor de verdad de las siguientes proposiciones

I. $x^5<1 \rightarrow x\le 1$
II. $a<0<b \rightarrow a^4>b^4$
III. $1/x<2 \rightarrow x>1/2$

A) VVV B) VFV C) VVF
D) VFV E) VFF

PROBLEMA 172

Si $a^2+b^2=c^2$; $\{a;b;c\}\subset\mathbb{R}^+$ dé el valor de verdad de cada proposición

I. $a+b>c$
II. $a^3+b^3>c^3$
III. $a+b<2c$

A) VVV B) VFV C) FFV
D) VVF E) FVV

PROBLEMA 173

El mayor entero que no supera al número

$\dfrac{3^{31}+2^{31}}{3^{29}+2^{29}}$ es igual a:

A) 4 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

PROBLEMA 174

Determine el número de soluciones no negativos de la inecuación $x+y\le 2006$

A) 2006 B) $1003\times 2007-1$
C) 1003 D) 1004×2007
E) 2007

PROBLEMA 175

Halle el número de pares de enteros $[x ; y]$ que satisfacen:

$$\begin{cases} x > y \\ 2x + y < 32 \\ x + 2y > 38 \end{cases}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 0

PROBLEMA 176

Sea el conjunto universal

$U = \{x / -3 \leq x \leq 3\}$

$A = \{x / 2x + 5 \leq x + 3 \, , \, 2x + 3 \leq 3(x + 1)\}$

$B = \{x / -3 \leq x \leq a\}$

halle **a** de modo que $B^C \subset A^C$

A) $-3 \leq a \leq -2$ B) $a \geq 0$
C) $0 \leq a \leq 3$ D) $0 < a \leq 3$
E) $0 \leq a < 3$

PROBLEMA 177

Si la ecuación cuadrática $(a - 2)x^2 - 2ax + (a + 3) = 0$ tiene raíces positivas, entonces

A) $a < -3$ B) $2 < a \leq 6$ C) $a > -3$
D) $A \vee B$ E) $a \leq 6$

PROBLEMA 178

Dada la inecuación cuadrática en x; $ax^2 - bx + 2a^2 > 0$ tal que su C.S. $= \mathbb{R} - [a ; b]$, calcule $\dfrac{a^2 + 2a}{b}$

A) 1 B) 0 C) –1
D) 2 E) –2

PROBLEMA 179

Resolver $2[\![x]\!]^2 - 9[\![x]\!] + 4 < 0$

A) $[1 ; 4\rangle$ B) $\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$
C) $\{1 ; 2; 3\}$ D) $[1 ; 4]$
E) $[0 ; 4\rangle$

PROBLEMA 180

Dada la inecuación $x^4 + y^4 - 6[x^3 - y^3] + 9[x^2 + y^2] \leq 0$; dé el valor de no verdad de las proposiciones

I. No tiene solución
II. Su conjunto solución no es acotado
III. Es compatible determinado

A) FFV B) FVF C) VFV
D) VVF E) VVV

PROBLEMA 181

Si la ecuación $x^2 - 2hx + h > 3/16$ se verifica para todo $x \in \mathbb{R}$; halle $[\![h]\!]$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) $A \vee B$

PROBLEMA 182

Halle la suma de soluciones al resolver:

$$(x^3 - x^2 - 5x + 6)^2 (x^2 - 16)^2 \leq 0$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA 183

Luego de resolver la inecuación en $\mathbb{Z}$.

$\frac{26}{x-3} > \frac{x-4}{27}$; Determine la cantidad de soluciones:

A) 33 B) 24 C) 25

D) 26 E) 27

PROBLEMA 184

Al resolver el sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} x^5 \geq 100x^3 \\ \dfrac{(x+9)(5x-x^2-18)}{x^2-16x+48} \geq 0 \end{cases}$$

Se obtuvo C.S = [a ; b] ∪ [c ; d ⟩; determine a + b + c + d

A) 6 B) 5 C) 4

D) 3 E) 12

PROBLEMA 185

Resuelva: $\frac{2x^3-4x^2+x-2}{x^3-5x^2+7x-3} \geq 0$

A) ⟨ – ∞ ; 1 ⟩ ∪ ⟨ 2 ; 3⟩

B) ⟨ – ∞ ; –1/2 ⟩

C) ⟨ – ∞ ; 1/2] ∪ ⟨ 1 ; 2] ∪ ⟨3 ; + ∞ ⟩

D) ⟨ – ∞ ; –1/2] ∪ ⟨1 ; 2⟩

E) ⟨ – ∞ ; 1 ⟩ ∪ ⟨ 1 ; 2] ∪ ⟨ 3 ; + ∞ ⟩

PROBLEMA 186

Sean x, y números enteros positivos, tal que:

$x = \sqrt{y\sqrt{y\sqrt{y}}}$, halle mín$(x + y)$

A) 4 B) 2 C) 6

D) 5 E) 3

PROBLEMA 187

Resuelve: $(\sqrt{x+2} - x)(\sqrt{1-x} - 1) < 0$

A) ⟨0 ; 1] B) [–2 ; 1] C) ⟨ 0 ; 2 ⟩

D) ⟨– 2 ; 0 ⟩ E) [–2 ; –1⟩

PROBLEMA 188

Resuelva: $\frac{3x\sqrt{x-3} - 2\sqrt{4x-12}}{\sqrt{9x+27}(x-5)} \geq \frac{2}{5}$

A) ⟨ 5,5 ; + ∞ ⟩ B) ⟨–5 ; + ∞ ⟩

C) ⟨ 5 ; + ∞ ⟩ D) ⟨ 0 ; 5 ⟩

E) ⟨ – ∞ ; 5 ⟩

PROBLEMA 189

Dada la siguiente inecuación

$|x-2|^{1/2} + |3-x|^{1/2} > |x-1|^{1/2} - |6-x|^{1/2}$

determine la suma de soluciones enteras

A) 4 B) 3 C) 5

D) 6 E) 2

PROBLEMA 190

Al resolver la inecuación

$\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2+x+4} < \sqrt{x^2+x+9}$

A) $\mathbb{R}$ B) ϕ C) ⟨ – 1 ; 0 ⟩

D) ⟨– 1 ; 1⟩ E) ⟨ 1 ; ∞ ⟩

PROBLEMA 191

Luego de resolver: $\sum_{i=1}^{2} |x-i| = 4$, indique

Inf(C.S) + Sup(C.S)

A) 5 B) 7 C) 11

D) 3 E) 9

PROBLEMA 192

Si $|x-3| < \varepsilon \;\rightarrow\; |x^2-9| < \delta$

Para $\varepsilon = 0,5$ determine el mínimo δ

A) 3/4 B) 13/4 C) 5/4

D) 3/7 E) 9/4

PROBLEMA 193

Dé el valor de verdad de las siguientes proposiciones

I. $|a-b| \leq |a| + |b|$; $\forall$ a, b $\in \mathbb{R}$

II. $|a| - |b| < |a-b|$; $\forall$ a, b $\in \mathbb{R}$

III. $|b| - |a| \leq |a-b|$; $\forall$ a, b $\in \mathbb{R}$

A) VFF B) VFV C) FFF

D) FVF E) VVF

PROBLEMA 194

Dada la siguiente expresión

$f(x) = \sqrt{9+6x+x^2} - \sqrt{4-4x+x^2}$; determine la variación de x para que dicha expresión sea independiente de x.

A) $\langle -3 ; 2 \rangle$ B) $[-3 ; 2]$ C) $[-3 ; 2\rangle$

D) $\mathbb{R} - \langle -3 ; 2 \rangle$ E) $\langle -3 ; 2]$

PROBLEMA 195

Resuelva:

$$\frac{|x-3| - |4-x|}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x-1}} < \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2}}{|x-4| + |3-x|}$$

A) $[1 ; 2\rangle$ B) $[2 ; 9\rangle$ C) $[2 ; 3\rangle$

D) $[2 ; 7\rangle$ E) $[2 ; 4\rangle$

PROBLEMA 196

Halle el conjunto A^C.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{[-x^2+|x|-1][x^2+|x|-2]^3}{[x^2-|x|+2]^5\sqrt{x^2-|x|-6}} < 0 \right\}$$

A) $[-3 ; 1 \rangle \cup \langle 1 ; 3]$

B) $\langle -3 ; 1] \cup [1 ; 3 \rangle$

C) $[-3 ; -1 \rangle \cup \langle 1 ; 3]$

D) $\langle -3 ; -1] \cup [1 ; 3\rangle$

E) $[-3 ; 3]$

PROBLEMA 197

Determine cual de los siguientes conjuntos es acotado

A) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, \left| \frac{1}{x} \right| < 1 \right\}$

B) $B = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq |x| \}$

C) $C = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, x + |x| = 0 \}$

D) $D = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, |x+1| < |x+2| \}$

E) $E = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 3|x| < -2 \}$

PROBLEMA 198

Dada la inecuación:

$$|2x-3|<|x+1|<2x+1$$

Se obtuvo como C.S = ⟨ a ; b ⟩, determine b/a

A) 8 B) 2 C) 3
D) 6 E) 12

PROBLEMA 199

Sean a, b, c $x \in \mathbb{R}^+$ son positivos. Si

$$A=\{x\in\mathbb{R} \;/\; a(x^{3/2}-x^{1/2})^2+|b(x^2-x)| + c|x|\geq |cx|\}$$

$$B=\left\{\frac{x-2}{|x-2|+1} \;\Big/ x\in\mathbb{R}\right\}, \text{ calcule } A-B^C$$

A) [0 ; 1] B) ⟨0 ; 1] C) ϕ
D) [0 ; 1 ⟩ E) ⟨0 ; 1⟩

PROBLEMA 200

Determine la suma de todos los "x" enteros que verifican $|x-3|+|x+2|\leq|x+4|$

A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 30

PROBLEMA 201

¿Cuántos enteros x verifican:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x-3}-\sqrt{7-x}}{\sqrt{2x}-\sqrt{x+4}}}\geq\frac{x-3}{x-7}\,?$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA 202

Resolver: $\sqrt{x^2+\sqrt{x-|x|}}\geq 2-x$

A) ⟨1 ; ∞⟩ B) ⟨0 ; ∞ ⟩ C) [0 ; ∞ ⟩
D) [1 ; ∞ ⟩ E) [1 ; 10 ⟩

PROBLEMA 203

Resolver: $[\![-x]\!]+x\leq\sqrt{2}$

A) ϕ B) $\mathbb{R}^+$ C) $\mathbb{R}^-$
D) $\langle -\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2}\ \rangle$ E) $\mathbb{R}$

PROBLEMA 204

Determine la suma de todos los valores enteros que asume x en:

$$\frac{|2x-1|-|x|}{[\![x+5]\!]\sqrt{x-1}}\geq\frac{\sqrt{2-x}-3}{|4-x|+1}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA 205

¿Para qué valores de k la inecuación en x, $kx+k-1\geq 0$ se verifica para todo $x\in\mathbb{Z}^+$?

A) ⟨ 1 ; +∞ ⟩ B) [1 ; ∞⟩ C) [1/2 ; +∞⟩
D) $\mathbb{R}$ E) $\mathbb{R}^+$

PROBLEMA 206

Si la inecuación $4x^2+ax(x-2)+b\leq 0$ tiene como conjunto solución al intervalo ⟨ −∞ ; 3], calcule ab

A) 15 B) 24 C) 69
D) 96 E) 58

PROBLEMA 207

Luego de resolver la inecuación:

$$\frac{3x+\sqrt{50}-1}{5}+\frac{2x-\sqrt{72}+3}{6}>1$$

Indique la menor solución entera

A) 0 B) 1 C) 2

D) – 1 E) 4

PROBLEMA 208

Dada la inecuación en x

$x^2+(\alpha-1)x+\alpha^2-2\leq 0$; $\alpha\in\mathbb{Z}$, ¿Para cuántos valores de $\alpha\{0\,;\,1\}\subset$ C.S.?

A) 1 B) 0 C) 2

D) 4 E) 7

PROBLEMA 209

¿Cuáles son los valores de m para los cuales $\exists\, x\in\mathbb{R}/x^2+5x+m<0$?

A) $\langle-\infty\,;\,1\rangle$ B) $\langle-\infty\,;\,25/4]$

C) $\langle 5/2\,;\,+\infty\rangle$ D) $[25/2\,;\,+\infty\rangle$

E) $\langle-\infty\,;\,25/4\rangle$

PROBLEMA 210

Si $\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2+5x+\alpha>0\}=\mathbb{R}$ entonces el menor valor entero de α es:

A) 1 B) 4 C) 2

D) 6 E) 7

PROBLEMA 211

Para todo $\alpha\in\mathbb{R}$; definimos el conjunto

$$\{x\in\mathbb{R}\,/x^2+5x+\alpha>0\}=\mathbb{R}.$$

Halle $(M_1\cap M_2)^C$

A) $[-1\,;\,0]$ B) $[0\,;\,+\infty\rangle$ C) $\langle-\infty\,;\,0]$

D) $[-1\,;\,+\infty\rangle$ E) $[0;\sqrt{2^{-1}}\,]$

PROBLEMA 212

Respecto a la inecuación cuadrática en x, $ax^2+bx+c>o$. indique el valor de verdad de las proposiciones

I. $a>0\ \rightarrow(\text{C.S})\cap\mathbb{R}^+\neq\phi$

II. $ab<0\rightarrow \text{C.S.}=\phi$

III. $\text{C.S.}\neq 0\ \rightarrow a>0$

A) VFF B) VVF C) FVF

D) VVV E) FVV

PROBLEMA 213

Dados los conjuntos:

$A=\{x\in\mathbb{R}\,/x^2-4x+3\leq 0\}$

$B=\{x\in\mathbb{R}\,/x-k>0\}$

Halle los valores de k; si $A\cap B=\phi$

A) $k<1$ B) $k\leq 1$ C) $k>3$

D) $k\geq 3$ E) $k\geq 4$

PROBLEMA 214

Resuelva la inecuación:

$$(x^2-1)^2+6(x+1)\leq(x+3)^2-(2x^2+1)$$

e indique cuántos enteros la verifican

A) 0 B) 1 C) 2

D) 3 E) más de 3

PROBLEMA 215

Al resolver la inecuación:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^4\left(3x^2+\frac{4x}{3}+\frac{1}{3}\right)(3x-1)^5\left(x^3+\frac{1}{8}\right)\leq 0$$

se obtuvo C.S. = [a; b] ∪ {–a}. Calcule el valor de (b – a)

A) 5/6 B) 3/5 C) 6/5
D) –5/6 E) –3/5

PROBLEMA 216

Dado el conjunto

$A=\{x\in\mathbb{R}\ /\ (x^2-7x+6)(x^3+8)(2x^2-x-1)\leq 0\}\subset\mathbb{Z}^-$.

Calcule n(A)

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) más de 3

PROBLEMA 217

Resuelva la inecuación: $x^3-6x^2+12x\geq 6x+2$ y calcule la suma de la menor solución entera con el mayor entero que no es solución

A) 9 B) 5 C) 10
D) 12 E) 8

PROBLEMA 218

Al resolver la inecuación:

$3(1-2x)(x^2-1)^2(2x^2+3x-2)\geq 0$

se obtuvo C.S = ⟨–∞ ; a] ∪ { 1/c ; b ; –b}
Calcule a + b + c

A) 3 ∨ 1 B) 2 ∨ 1 C) 1 ∨ – 1
D) 1 ∧ 0 E) 1 ∧ – 1

PROBLEMA 219

Indique A^C, si el conjunto A es dado por:
$A=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x^2\leq 4\rightarrow x^3\leq 4x\}$

A) ⟨0 ; 2⟩ B) ⟨–∞ ; 2⟩ C) [–2 ; 2]
D) ⟨–2 ; 0 ⟩ E) [0 ; 2]

PROBLEMA 220

Dada la inecuación $x^2(x-3)>9(1-x)$, indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

p: $x>\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1$

q: $x<\sqrt[3]{2}+1$

r: $x\in\phi$

A) VVV B) VFV C) VFF
D) FFV E) FFF

PROBLEMA 221

Al resolver la inecuación:

$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-3}>2002$, el conjunto solución es de la forma ⟨a; b ⟩ ∪ ⟨ c ; d ⟩, donde a < c. Halle $\frac{a+d}{b+c}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 2002

PROBLEMA 222

Resuelva la inecuación: $\frac{x^3-x}{-x}<x-\frac{1}{x}$

e indique cuántos enteros no la verifican

A) 0 B) 1 C) 2
D) –2 E) –1

PROBLEMA 223

Luego de resolver la inecuación:

$\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+3}\geq\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}$, indique el intervalo solución

A) $\langle -\infty ; -3\rangle$ B) $\langle 0 ; 4\rangle$ C) $\langle 0 ; 3\rangle$

D) $[4 ; +\infty\rangle$ E) $\langle -3 ; 3\rangle$

PROBLEMA 224

Dados los conjuntos:

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}/5<\frac{2x-3}{x-3}<14\right\}$$

$$B=\left\{x\in\mathbb{R}/-2<\frac{x-3}{x^2}<1\right\}$$

Halle $A\cap B$

A) $\langle 13/4 ; 4\rangle$ B) ϕ C) $\langle 3 ; 4\rangle$

D) $\langle 1 ; 4\rangle$ E) $\langle -3/2 ; 2\rangle$

PROBLEMA 225

Luego de resolver la inecuación

$\frac{2}{x-2}<\frac{x+2}{x-2}\leq\frac{x-2}{x-2}$, podemos afirmar:

A) $x>0$ B) $x<0$ C) $x\in\phi$

D) $x<-2$ E) $x>-2$

PROBLEMA 226

Resuelva la inecuación:

$\frac{(x^2-x)(x^2+3x+2)}{(x-3)(x^2+x-2)}\geq x+1$. Indique el número de soluciones enteras

A) 2 B) 5 C) 6

D) 3 E) 4

PROBLEMA 227

Resuelva la inecuación irracional

$$\frac{\sqrt{8-x}+x^2-1}{x^2+\sqrt{x-1}-3x+15}\geq\frac{-x-15}{x^2+\sqrt{x^2-36}+x-5}$$

A) $[4 ; 8]$ B) $\langle 1 ; 8\rangle$ C) $[1 ; 6]$

D) $\langle 6 ; 8\rangle$ E) $[6 ; 8]$

PROBLEMA 228

¿Cuántos enteros negativos no verifican la inecuación irracional

$$\sqrt{x^2-2x-15}>x+1\,?$$

A) 6 B) 4 C) 3

D) 2 E) 0

PROBLEMA 229

Resuelva la ecuación:

$x^2+1+|2x-1|+|3x|=|x^2+|x+1|+1|$

e indique el número de soluciones enteras

A) 2 B) 1 C) 0

D) 6 E) infinitas

PROBLEMA 230

Resuelva la inecuación

$$\frac{|6x-6|-|4x+12|}{2x^2-x+5}<\frac{|2x-2|-|3x+9|}{2x^2-x+5}$$

A) $\langle 1/5 ; 1\rangle$ B) $\langle 1/5 ; 7/3\rangle$

C) $\langle -\infty ; 7/5\rangle$ D) $\langle 1/5 ; +\infty\rangle$

E) $\langle -\infty ; 1/3\rangle\cup\langle 1/3 ; +\infty\rangle$

PROBLEMA 231

Al resolver la inecuación $|x-3|+6x<|x^2+3|$ se obtiene

C.S. $\langle -\infty ; a\rangle \cup \langle b ; +\infty\rangle$. Halle a + b

A) $\sqrt{6}+2$ B) $-\sqrt{6}$ C) 5

D) $\sqrt{6}$ E) 6

PROBLEMA 232

Resuelva la inecuación

$$\frac{1}{\sqrt{x-4}+\sqrt{7-x}}>2-\left|\frac{2x-1}{x-2}\right|$$ e indique la cantidad de elementos enteros de su conjunto solución.

A) 6 B) 2 C) 3

D) 5 E) 4

PROBLEMA 233

¿Cuántas soluciones tiene la ecuación irracional.

$$\frac{\sqrt{x-2}+|x-6|-4}{|x-2|+\sqrt{6-x}}=0 \text{ ?}$$

A) 0 B) 1 C) 2

D) 3 E) más de 3

PROBLEMA 234

Dado el conjunto :

$M=\{x\in\mathbb{Z} \,/\, |x-9|(y+5)>0 ;$
$x+y<5\}$ halle el supremo de M

A) 1 B) 7 C) 13

D) 10 E) 8

PROBLEMA 235

Dada la ecuación en x,
$(a-1)x^2+ax+a-15=0$; $a\in\mathbb{Z}$ con raíces reales $x_1 \wedge x_2$, tal que: $|x_1+5x_2|<|x_1|+5|x_2|$; halle la suma de los valores de a.

A) 10 B) 105 C) 104

D) 100 E) 101

PROBLEMA 236

Resuelva la inecuación:

$$||x|-|x-3||\leq 1-2x$$

A) $x<-1$ B) $x\geq 1$

C) $-1\leq x\leq 1$ D) $0<x\leq 1$

E) $x\leq -1$

PROBLEMA 237

Resuelva la inecuación $\dfrac{|3x-1|+2x}{|x+1|-3x}\geq 0$ e indique el supremo del conjunto solución

A) 1 B) 0 C) 1/2

D) –1/2 E) –1

PROBLEMA 238

Resuelva la inecuación:

$$\frac{|x-x^2|(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-6x}\geq 0$$

A) $\langle 1 ; 36]$ B) $\langle -1 ; 1/36]$

C) $\langle -1 ; 1\rangle$ D) $[1/36 ; 1\rangle$

E) $\langle 1/36 ; 1]$

PROBLEMA 239

Resuelva la inecuación $\frac{|x|}{1+|x|} \geq \frac{1}{x}$; e indique la menor solución positiva

A) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ B) $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ C) $1+\sqrt{2}$

D) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ E) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

PROBLEMA 240

Resuelva la inecuación:

$$||x-4|-3| \leq 2x+1$$

A) $[2 ; +\infty\rangle$ B) $[3 ; +\infty\rangle$ C) $[0 ; +\infty\rangle$

D) $[-2 ; +\infty\rangle$ E) $[-1/2 ; +\infty\rangle$

PROBLEMA 241

Resuelva la inecuación

$$\left|\frac{|x-6|+|x-3|-2x}{|2x-1|-x+1}\right| < x-8$$

A) $\langle -1 ; 8\rangle$ B) $\langle 8 ; 9\rangle$

C) $\langle 8 ; +\infty\rangle$ D) $\langle 9 ; +\infty\rangle$

E) $\langle -\infty ; -1\rangle \cup \langle 9 ; +\infty\rangle$

PROBLEMA 242

Dado A = {0, 1, 2} y la tabla:

*	0	1	2
0	0	1	2
1	1	0	1
2	2	1	0

Se puede afirmar:

I. 0 es el neutro de la operación.

II. $[\{(0 * 1) * 1\} * 2] * 2$ es 0

III. $(2^{-1} * 1^{-1}) * 2$ es 0

A) VVF B) VVV C) FVV

D) FVF E) FFF

PROBLEMA 243

En los reales definimos la operación mediante:

$$a \psi b = a + b - 8 ; \forall a, b \in \mathbb{R}$$

según esta operación, la suma del elemento neutro con el elemento inverso de, (–25) es:

A) –25 B) –8 C) 9

D) 25 E) 49

PROBLEMA 244

Dados los conectivos lógicos definimos en la tabla

∨	V	F
V	V	V
F	V	F

∧	V	F
V	V	F
F	F	F

Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones

I. $(p \vee q) \wedge r$: $\wedge$ es distributiva

II. $(p \wedge q) \vee r$: $\vee$ es distributiva

III. $(p \wedge q) \wedge p = p$

A) VVV B) VFF C) FFF

D) FVV E) FVF

PROBLEMA 245

Sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3, 6\}$ se define la operación $a*b = MCD(a, b); \forall a, b \in A$. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones

p: la operación $*$ es conmutativa

q: la operación $*$ es asociativa

r: el elemento neutro respecto a $*$ es 6

A) VVV B) VFV C) VFF
D) FFF E) FVV

PROBLEMA 246

Resolver:

$|x-1|+|x-2|+.....+|x-9|<x-10$

A) $\langle -1 ; 1 \rangle$ B) $\langle 10 ; +\infty \rangle$ C) $\langle -\infty ; 10 \rangle$
D) $\langle -2 ; 1 \rangle$ E) ϕ

PROBLEMA 247

Si $x \in \langle -1 ; 1 \rangle$ calcular el valor de $F(x) = [\![x^2 - 1]\!]$

A) –2 B) – 1 C) 0
D) 1 E) 2

PROBLEMA 248

Si $x \in \langle -2 ; -1 \rangle$, calcular el valor de: $[\![x]\!] + [\![-x]\!]$

A) 3 B) – 2 C) – 1
D) 0 E) 1

PROBLEMA 249

Resolver la ecuación $[\![x]\!] + x = 0$

A) $\{0 ; 1\}$ B) $\langle 0 ; 1 \rangle$ C) $[0 ; 1/2$
D) $\{0\}$ E) $\{1\}$

PROBLEMA 250

Dado el operador # definido en

$A = \{\{a\}, \{b\}, \{a ; b\}\}$ y la tabla:

#	ϕ	{a}	{b}	{a; b}
ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ
{a}	ϕ	{a}	ϕ	{a}
{b}	ϕ	ϕ	{b}	{b}
{a ; b}	ϕ	{a}	{b}	{a; b}

luego de resolver la ecuación:

$x \# x^{-1} = Z$, tal que $x; x^{-1}, Z \in A$.

y: $\cup$ es unión

Entonces $x \cup x^{-1} \cup Z$ es:

A) $\{a ; b\}$ B) $\{a\}$ C) $\{b\}$
D) ϕ E) $\{1\}$

PROBLEMA 251

Sea el conjunto: $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ ax^2 + 5ax + 6a > 0 \ ; \ a < 0\}$, calcular el valor de: $\dfrac{5|x_0 - 4| - |3x_0 - 20|}{x_0}$. Sabiendo que x_0 es un elemento del conjunto A.

A) –2 B) 3 C) 1
D) 2 E) 5

PROBLEMA 252

Resolver: $[\![3x - 1]\!] > [\![x + 3]\!]$

A) $[7/3 ; \infty\rangle$ B) $\langle 7/3 ; \infty\rangle$ C) $[4/3 ; \infty\rangle$
D) $\langle 1/3 ; \infty\rangle$ E) $[1/3 ; \infty\rangle$

PROBLEMA 253

Dados los conjuntos:

$$A=\left\{x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{1}{x} \leq 1\right\}$$

$$B=\left\{x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{1}{x-2} \geq 1\right\}$$

determine $A-B^C$.

A) $\langle -2 ; 2\rangle$ B) $\langle 2 ; 3]$ C) $\langle -2 ; 4]$
D) $[2 ; 3]$ E) ϕ

PROBLEMA 254

Dado el conjunto $S=\left\{\frac{x+2}{x+3} \,/\, \frac{1}{2} \leq x \leq 1\right\}$

Calcule Inf(S) + Sup(S).

A) 8/11 B) 15/28 C) 39/28
D) 43/14 E) 41/28

PROBLEMA 255

Sean x; y ; z reales positivos que verifican $\frac{x^2}{2}+\frac{y^3}{3}+\frac{z^6}{6} \geq nxyz$ calcule el mayor valorde n.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA 256

Calcule el menor valor de $J = a^2 + 2b^2$, si se sabe que $2a + 3b = 4$

A) 1 B) 2/5 C) $\sqrt{5}$
D) 32/17 E) 96/17

PROBLEMA 257

Determine el menor valor de k para que la desigualdad

$$(ab+cd)^2 \leq k\left(\frac{a^2+c^2}{2}\right)\left(\frac{b^2+d^2}{2}\right)$$

se cumpla para todo a, b, c, d $\in \mathbb{R}$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 8

PROBLEMA 258

Si $(x_0 ; y_0)$ representa una solución de componentes enteras positivas de las inecuaciones $y + 4 > x \wedge 3x + y < 12$, calcule el mayor valor de $x_0 + y_0$.

A) 8 B) 9 C) 10
D) 7 E) 6

PROBLEMA 259

Determine los valores de k si los conjuntos

$A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 4x + 3 \leq 0\}$ y

$B = \{x \in \mathbb{R} / x - k > 0\}$ son disjuntos.

A) $k \in \langle -\infty ; 1\rangle$ B) $k \in \langle -\infty ; 1]$
C) $k \in \langle -\infty ; 3\rangle$ D) $k \in [3 ; +\infty\rangle$
E) $k \in [4 ; +\infty\rangle$

PROBLEMA 260

Si el conjunto solución de la inecuación $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 < 0$ es de la forma CS = $\langle a ; b\sqrt{c} \rangle$, calcule el valor de a^2/bc

A) 1/4 B) 1/2 C) 1

D) $\sqrt{2}/2$ E) $\sqrt{2}$

PROBLEMA 261

Si $x \in \mathbb{R}$, indique la mayor longitud que puede tener el intervalo $[2x - 1 ; 1 - x^2]$.

A) 1 B) $2\sqrt{3}$ C) 3

D) $3(\sqrt{2} - 1)$ E) $4(\sqrt{3} - 1)$

PROBLEMA 262

Si $x > 1$, entonces, el menor valor entero que admite $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 4}{x - 1}$ es

A) 5 B) 4 C) 3

D) 2 E) 1

PROBLEMA 263

Indique el número de valores enteros positivos que puede tomar m si se sabe que m es un elemento del conjunto solución de la inecuación $5x - 2m < 5$.

A) 0 B) 1 C) 2

D) 3 E) Más+ de 3

PROBLEMA 264

Si S es el conjunto solución de la inecuación $(x + 1)^2 \leq 4(x + 1)$, calcule $\ell_{(s)}$.

A) 4 B) 3 xC) 2

D) 1 E) 0

PROBLEMA 265

Si la inecuación cuadrática $mx^2 + 4x + n \geq 0$ tiene C.S = [m ; n] calcule el valor de m/n.

A) 1 B) 1/5 C) 5

D) –5 E) –1/5

PROBLEMA 266

Si el polinomio $P_{(x)} = x^2 - 1$ verifica la inecuación $P^2_{(x)} - 2P_{(x)} \leq 3$, indique cuántos valores enteros admite x.

A) 7 B) 6 C) 5

D) 4 E) 3

PROBLEMA 267

Dada la inecuación cuadrática en x, $n^3x^2 \cdot nx - 6n \geq 0$, tal que su C.S. = [–2 ; 3], determine $(n + 1)^2$.

A) 9 B) 4 C) 16

D) 0 E) 25

PROBLEMA 268

Sea $f_{(x)} = 2 + 6x - 3x^2$ una expresión tal que $f_{(x)} \leq \lambda \; \forall x \in \mathbb{R}$, calcule el menor valor de λ.

A) 9 B) –5 C) 16/3

D) 5 E) 6

PROBLEMA 269

Si la inecuación cuadrática

$x^2 + ax - 2 \geq 2x^2 - 2x + 2$ tiene CS = {b}, calcule el menor valor de (a + b)

A) –8 B) 6 C) 4

D) –2 E) 0

PROBLEMA 270

Halle los valores de n, si la inecuación $(2 - n)x^2 + (n + 1)x + 1 > 0$ tiene como conjunto solución al intervalo $\langle -\infty ; 2\rangle \cup \langle 0 ; +\infty\rangle$

A) $\langle -7 ; 2\rangle$ B) $\langle -1 ; 2\rangle$ C) $\langle -7 ; -1\rangle$

D) $\langle 0 ; 1\rangle$ E) $\langle -7 ; 1\rangle$

PROBLEMA 271

¿Para cuántos valores enteros de a se verifica que $x_1 < a - 3 < x_2$, si x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación

$$3x^2 - 2(a + 2)x + 3(a - 1) = 0?$$

A) 4 B) 3 C) 2

D) 1 E) 0

PROBLEMA 272

Determine las soluciones positivas de la inecuación:

$$2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 11x - 6 \geq 0.$$

A) $[1/2 ; +\infty\rangle$ B) $[1/2 ; 2]$

C) $[1 ; 2]$ D) $[1 ; +\infty\rangle$

E) $[1/2 ; 1] \cup [2 ; +\infty\rangle$

PROBLEMA 273

Halle el conjunto solución de la inecuación $(x^2 - 3x + 2)^2(x - 3)(x - 5) \leq 0$

A) $[3 ; 5] \cup \{1 ; 2\}$

B) $[-3 ; 5]$

C) $\langle -\infty ; 3] \cup [5 ; +\infty\rangle$

D) $\langle -\infty ; 3\rangle \cup [5 ; +\infty\rangle \cup \{4\}$

E) ϕ

PROBLEMA 274

Resuelva la inecuación fraccionaria

$$\frac{x + a}{x + b} \leq \frac{ax + 1}{bx + 1}$$ (considere a > b > 1).

A) $\langle 1 ; b\rangle \cup \langle a ; +\infty\rangle$

B) ϕ

C) $\langle -\infty ; -b\rangle \cup [-1 ; -1/b\rangle \cup [1 ; +\infty\rangle$

D) $\mathbb{R} - \langle a ; b\rangle$

E) $[-1/2 ; a\rangle$

PROBLEMA 275

Dados los conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{R} / 2x + 1 \in \langle 1; 5]\}$

$B = \{x^2 - 1 \in \mathbb{R} / x \in A\}$

determine el conjunto $(A - B) \cup (B - A)$

A) {1} B) $\langle 2 ; 3] \cup \{-1\}$

C) $\langle 2 ; 3\rangle$ D) $\langle -1; 0] \cup \langle 2 ; 3]$

E) ϕ

PROBLEMA 276

Dados los intervalos no vacíos

$A = \langle 2x - 1 ; 3] \wedge B = \langle -1 ; 2x + 1]$

Si $A \cap B \subset [0 ; 2]$, podemos afirmar que

A) $A \cap B = [0 ; 2]$ B) $A - B = [2 ; 3]$

C) $A \cap B = \langle 0 ; 2\rangle$ D) $A \cap B = \langle 0 ; 2]$

E) $B - A = \langle -1 ; 0\rangle$

PROBLEMA 277

Sea A un conjunto tal que

$A = \left\{ \frac{x+3}{x+2} \Big/ x \in \mathbb{R} \right\}$. Si se sabe que $\text{Inf}(A) = 2 \in A \wedge \text{Sup}(A) = 4 \notin A$, halle el conjunto de valores de x.

A) $\langle -1 ; 0\rangle$ B) $\langle -2 ; 0\rangle$

C) $\langle -1 ; 1\rangle$ D) $\langle -5/3 ; -1]$

E) $\langle -3/5 ; -1\rangle$

PROBLEMA 278

Si $x \in \langle -1 ; 4] \wedge y \in \langle 1 ; 3]$, indique el número de valores enteros que toma $xy + 2x + 5y$.

A) 23 B) 33 C) 45

D) 5 E) 6

PROBLEMA 279

Determine el mayor valor de A si

$$A = \frac{x^2}{1 + x^2 + x^4} ; x \in \mathbb{R}$$

A) $\sqrt{2}$ B) 1 C) 1/2

D) 1/3 E) 1/11

PROBLEMA 280

Dado el conjunto

$R = \{(a + b) \in \mathbb{R} \;/\; a^2 + b^2 = 1\}$, calcule el valor de

$$\lambda = \frac{\text{Inf}(R)}{\text{Sup}(R)}$$

A) $\sqrt{2}$ B) -1 C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

D) 1 E) $-\sqrt{2}$

PROBLEMA 281

Sean x ; y números reales que verifican $x^2 + y^2 = 6x - 8$. Halle el intervalo (de menor longitud) donde se encuentra $(x + y)$.

A) $\langle \sqrt{3} + 2 ; 8]$ B) $\left\langle -\sqrt{2} ; \sqrt{2} \right\rangle$

C) $\langle 0 ; \sqrt{2} + 1]$ D) $[3 - \sqrt{2} ; 3 + \sqrt{2}]$

E) $[1 - \sqrt{2} ; \sqrt{2} + 1]$

PROBLEMA 282

Dado el conjunto $\{x ; y ; z ; \omega\} \subset \mathbb{R}^+$, tal que $x + y + z = \omega$, calcule el mayor valor de λ que verifica.

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\omega^2} \geq \lambda$$

A) 1/6 B) 1/3 C) 1/2
D) 1 E) 2

PROBLEMA 283

Halle el menor valor entero que verifica la inecuación en x.

$$\frac{a}{b}\left[\frac{x}{b}+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]>\frac{b}{a}\left[\frac{a^2}{b^3}+x\right];\ b<0<a$$

A) –1 b) 1 C) 2
D) 3 E) 4

PROBLEMA 284

Dado el polinomio lineal $P_{(x)}=ax+b$, con a y b reales, tal que

$2\le P_{(1)}\le 3\ ;\ 4\le P_{(2)}\le 5\ ;\ P_{(0)}\ge 2$

resuelva la inecuacion$P_{(-x+1)}\le P_{(x+3)}$.

A) $\langle-\infty;1]$ B) $\langle-\infty;-1]$ C) $[-1;+\infty\rangle$
D) $1;+\infty\rangle$ E) $[3/2;+\infty\rangle$

PROBLEMA 285

Calcule el valor de (a^2-a+1) si la inecuacion $x^2-3x+a+2<a^2$; $a\in\mathbb{Z}^+$, tiene exactamente 4 soluciones enteras.

A) 2 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

PROBLEMA 286

Indique cuántas soluciones enteras tiene la inecuación

$(n+1)x^2+(1-n)x+(n-n^3-2)\le 0$ si su conjunto solución es el intervalo $[-n\ ;\ n]$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA 287

Dada la inecuación cuadrática

$x^2+(2\alpha-1)x+(4-\alpha)=0$ de raíces no reales, indique el mayor valor entero de α.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) –1

PROBLEMA 288

Sea S un conjunto tal que

$S=\{x\in\mathbb{R}/mx^2+(2m-4)x+m\ge 3\}$

Si $S=\varnothing$, halle el menor valor de m.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA 289

La inecuación polinomial

$x^4+16x<12$ tiene $CS=\langle a\ ;\ b\rangle$. Calcule el valor de $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

A) 1 B) –1 C) 1/3
D) –2 E) 2

PROBLEMA 290

Luego de resolver la inecuación.

$$-\sqrt{2}\,(6x^2-x-1)(x^2+4)(2x-1)^3\ge 0$$

se obtiene un conjunto solución de la forma $\langle -\infty ; 1/a] \cup \{1/b\}$. Calcule el valor de $(a+b)$.

A) 0 B) –1 C) 2
D) 1 E) –2

PROBLEMA 291

Si el conjunto de la inecuación
$x^5 - 2x^3 + ax^2 + bx + c < 0$ es el intervalo $\langle 1 ; 4\rangle \cup \langle -\infty ; 0\rangle$, entonces, ¿cuál es la relación que existe entre a, b y c?

A) $a = b = 2c$ B) $ab = c$
C) $a + 2b = c$ D) $ab < c$
E) $a + 2b < c$

PROBLEMA 292

Halle el complemento del conjunto solución de la siguiente inecuación.

$$\frac{3x-2}{x-1} > 2$$

A) $\langle -\infty ; 0\rangle \cup \langle 1 ; +\infty\rangle$ B) $\langle 0 ; 1\rangle$
C) $[2/3 ; 1]$ D) $[0 ; 1]$
E) $[0; 2/3]$

PROBLEMA 293

Dados los conjuntos
$A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 7x < 0\}$

$$B = \left\{x \in A \middle/ \frac{1}{2x-8} \geq \frac{1}{1-x}\right\}$$

$C = \{x \in \mathbb{R} / x \notin (A - B) \rightarrow x \in B\}$

determine el conjunto C por extensión.

A) $\langle -1 ; +\infty\rangle$ B) $\langle 0 ; 7\rangle$
C) $\langle 3 ; 4\rangle$ D) $[1 ; 4]$
E) $\langle 1 ; 3\rangle \cup \langle 4 ; +\infty\rangle$

PROBLEMA 294

Determine la variación de a si se sabe que la desigualdad $\dfrac{x^2 + ax + 1}{ax^2 - x + 2} \geq 0$ se verifica para todo $x \in \mathbb{R}$.

A) $a \in \langle 0 ; 1\rangle$ B) $a \in \langle 1/8 ; 2]$
C) $a \in [1/8 ; +\infty\rangle$ D) $a \in \langle 0 ; 1/8\rangle$
E) $a \in \langle 0 ; 2]$

PROBLEMA 295

Al resolver la inecuación

$\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+3} \leq -1$ se obtiene como conjunto solución al intervalo $[a ; b]$; entonces, ¿cuál es el valor de $b - a$?

A) 16/3 B) 2 C) 4/3
D) 1/3 E) 5/3

PROBLEMA 296

Resuelva la inecuación

$\sqrt{x^2 + x - 1} + 2 < x$ e indique los valores de x.

A) $x \geq 2$ B) $x \geq 0$ C) $-1 \leq x \leq 1$
D) $x \in \mathbb{R}$ E) $x \in \varnothing$

PROBLEMA 297

Resuelva la siguiente inecuación irracional. $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+2}-3}} > 4x - x^2 - 6$

A) $\langle -3\,;\,1\rangle \cup \langle 7\,;\,+\infty\rangle$

B) $[-2\,;\,1] \cup \langle 7\,;\,+\infty\rangle$

C) $\langle -2\,;\,1\rangle \cup [7\,;\,+\infty\rangle$

D) $\langle -2\,;\,0\rangle \cup [1\,;\,+\infty\rangle$

E) $\langle -3\,;\,0\rangle \cup [1\,;\,7\rangle$

PROBLEMA 298

Considere a > b > 1 para resolver la siguiente inecuación irracional

$$\frac{1}{x}\sqrt{\frac{\mathrm{a}x+1}{\mathrm{b}x-1}} \geq 0$$

A) $x \in \langle 0\,;\,+\infty\rangle$ B) $x \in [-1/\mathrm{a}\,;\,1/\mathrm{b}\rangle$

C) $x \in [1/\mathrm{b}\,;\,+\infty\rangle$ D) $x \in \langle 0\,;\,1/\mathrm{b}\rangle$

E) $x \in \langle 1/\mathrm{b}\,;\,+\infty\rangle$

PROBLEMA 299

Sean R y S los conjuntos soluciones de las inecuaciones irracionales

$$\frac{\sqrt[3]{x-3}\cdot\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt{x-4}\cdot\sqrt[5]{x-1}} \geq 0 \;\wedge\; \frac{(x-1)^7\cdot\sqrt{x-2}}{(x-3)^{15}\cdot\sqrt[3]{x-6}} < 0$$

respectivamente. Halle $R \cap S$.

A) $\langle 3\,;\,6\rangle$ B) $\langle 3\,;\,5\rangle$

C) $\langle 4\,;\,6\rangle$ D) $\langle 5\,;\,+\infty\rangle$

E) $\langle 1\,;\,3\rangle \cup \langle 6\,;\,+\infty\rangle$

PROBLEMA 300

Si x_0 es una solución de la ecuación

$$\sqrt[3]{\mathrm{sen}^2\theta - x} + \sqrt[3]{\cos^2\theta - x} = \sqrt[3]{x+1}$$

con $\theta \in \mathbb{R} \wedge (\mathrm{sen}\theta\,.\,\cos\theta)^2 \neq 1$; entonces

A) $-1/2 \leq x_0 \leq 1/2$ B) $0 \leq x_0 \leq 1/3$

C) $1 \leq x_0 \leq 4/3$ D) $2 \leq x_0 \leq 7/3$

E) $-1/3 \leq x_0 \leq 0$

Claves

1. D	31. E	61. D	91. C	121. A	151. C	181. A	211. A	241. D	271. A
2. A	32. A	62. D	92. D	122. A	152. C	182. A	212. A	242. A	272. A
3. E	33. B	63. B	93. E	123. C	153. C	183. D	213. C	243. E	273. A
4. B	34. C	64. B	94. A	124. C	154. B	184. D	214. D	244. A	274. C
5. B	35. E	65. A	95. E	125. C	155. E	185. E	215. A	245. A	275. D
6. A	36. D	66. B	96. A	126. B	156. A	186. B	216. E	246. E	276. D
7. B	37. D	67. C	97. B	127. E	157. B	187. A	217. A	247. B	277. D
8. B	38. C	68. D	98. D	128. C	158. C	188. C	218. C	248. C	278. B
9. D	39. B	69. C	99. A	129. A	159. D	189. C	219. D	249. D	279. D
10. E	40. B	70. B	100. A	130. A	160. A	190. C	220. C	250. A	280. B
11. B	41. C	71. A	101. A	131. C	161. B	191. D	221. A	251. A	281. D
12. C	42. D	72. A	102. D	132. E	162. C	192. B	222. C	252. A	282. B
13. D	43. A	73. C	103. C	133. D	163. B	193. B	223. C	253. D	283. C
14. C	44. D	74. B	104. A	134. E	164. A	194. D	224. A	254. E	284. C
15. C	45. B	75. B	105. C	135. B	165. E	195. E	225. B	255. A	285. D
16. B	46. D	76. B	106. C	136. A	166. D	196. E	226. D	256. D	286. C
17. A	47. B	77. B	107. C	137. A	167. E	197. E	227. E	257. D	287. B
18. B	48. C	78. A	108. B	138. A	168. D	198. D	228. D	258. B	288. E
19. A	49. D	79. D	109. A	139. E	169. B	199. D	229. B	259. D	289. A
20. B	50. A	80. A	110. A	140. E	170. E	200. D	230. B	260. B	290. B
21. A	51. C	81. A	111. A	141. D	171. E	201. C	231. E	261. E	291. D
22. E	52. D	82. D	112. C	142. E	172. A	202. D	232. E	262. A	292. A
23. E	53. C	83. B	113. A	143. B	173. B	203. E	233. C	263. B	293. B
24. C	54. D	84. A	114. C	144. D	174. D	204. C	234. D	264. A	294. B
25. E	55. B	85. A	115. A	145. C	175. E	205. C	235. C	265. E	295. E
26. D	56. A	86. B	116. D	146. A	176. A	206. D	236. E	266. C	296. E
27. E	57. C	87. C	117. D	147. A	177. D	207. B	237. C	267. D	297. B
28. E	58. A	88. D	118. A	148. D	178. A	208. C	238. E	268. D	298. E
29. C	59. E	89. D	119. D	149. E	179. A	209. E	239. D	269. A	299. C
30. A	60. D	90. A	120. B	150. B	180. A	210. E	240. C	270. E	300. B

- Introducción al sistema de los números reales.
- Números reales.
- La desigualdad.
- El intervalo.
- Inecuaciones con una sola incógnita.
- Valor absoluto.
- Máximo entero.
- Reglas adicionales.
- Problemas resueltos.
- Problemas propuestos.

Colección Lambda

- **Leyes de exponentes, polinomios, productos notables.**
- **División algebraica, factorización, MCD y MCM de polinomios.**
- **Fracción algebraica, radicación, racionalización.**
- **Factorial, número combinatorio, binomio de Newton.**
- **Análisis combinatorio, probabilidades.**
- **Números complejos.**
- **Ecuaciones I.**
- **Ecuaciones II.**
- **Números reales, desigualdades e inecuaciones.**
- **Relaciones y funciones.**
- **Función exponencial y logarítmica.**
- **Limites y derivadas.**
- **Sucesiones y serie.**
- **Matrices y determinantes.**
- **Programación lineal.**

Megabyte®
GRUPO EDITORIAL

Jr. Rufino Torrico 889- OF. 208- Cercado de Lima
Telf.: 332-4110 / 726-4141 Cel.: 945-513474 RPC: 997-894292
www.editorialmegabyte.com
LIMA-PERÚ

9934441141011